



多体系统动力学仿真

UM 软件入门系列教程

(01)

四川同算科技有限公司 译

2020 年 5 月

前言

本教程通过若干简单的机械系统模型引导读者学会**Universal Mechanism**（以下简称**UM**）软件最基本的多体系统建模和仿真方法，主要用到**UM Base**模块。请务必一步一步按顺序阅读和操作。

虽然汽车、履带车、铁路车辆等专业模块有特别的地方，但其基本的建模和仿真方法都是相同的。这些基本方法将在本教程中演示。

本套教程采用**UM8.5.8.8**版本，不同版本的界面和操作大体一致，仅略有差异。

版权和商标

本手册仅供读者参考，不同的版本界面可能有个别不同之处，我们会不定期进行修订。对于本文档中可能出现的任何错误，我们不承担任何责任或义务。

版权所有© 2020 Computational Mechanics Ltd.

俄罗斯计算力学有限公司保留所有权利。

联系方式

最新版的UM软件和相应的用户手册下载地址：

<http://www.universalmechanism.com/en/pages/index.php?id=3>.

在使用过程中，读者如有任何报错、疑问和建议，请发送邮件至：

um@universalmechanism.com

UM总部

Computational Mechanics Ltd.

Vostochnaya str. 2-14, Glinischevo, Bryansk region, 241525, Russia

Phone, fax: +7 4832 568637

www.universalmechanism.com

UM中国

四川同算科技有限公司

四川省眉山市彭山区蔡山西路2号伟业广场1911室

办公电话：028-38520556

公司网站：www.tongsuan.cn

电子邮件：um@tongsuan.cn



微信公众号



QQ 交流群

目 录

1.	单摆模型	1
1.1	课程内容	1
1.2	模型简介	2
1.3	建模	3
1.3.1	运行 UM Input 程序和新建模型	3
1.3.2	熟悉 UM Input 程序建模界面	3
1.3.3	创建几何图形.....	4
1.3.3.1	场景的几何图形.....	4
1.3.3.2	单摆的几何图形.....	8
1.3.4	创建刚体.....	9
1.3.5	创建铰.....	10
1.3.6	保存模型.....	11
1.3.7	运行 UM Simulation 程序.....	11
1.4	仿真	11
2.	自由振动与受迫振动	19
2.1	课程内容	19
2.2	模型简介	19
2.3	建模	20
2.3.1	运行 UM Input 程序和新建模型	20
2.3.2	创建几何图形.....	21
2.3.3	创建刚体.....	25
2.3.4	创建铰.....	27
2.3.5	创建力元.....	30
2.3.6	弹簧和阻尼力元的可视化.....	31
2.3.7	附加参数.....	33
2.3.8	准备仿真.....	35
2.4	仿真	36
2.4.1	自由振动.....	36
2.4.2	统计分析.....	42
2.4.3	静态和线性分析.....	43
2.4.4	受迫振动.....	45
3.	悬臂梁	47
3.1	课程内容	47
3.2	模型简介	47
3.3	建模	48
3.3.1	创建几何图形.....	48
3.3.2	创建刚体.....	50
3.3.3	创建铰.....	51
3.3.4	准备仿真.....	54

3.4	仿真	55
3.4.1	计算平衡位置.....	55
3.4.1.1	解析法直接求解平衡方程.....	55
3.4.1.2	运动方程数值积分求解.....	56
3.4.2	计算固有频率和振动模态.....	58
3.4.3	欧拉临界力.....	61
3.4.4	大变形.....	64
4.	后续学习课程.....	70
5.	参考文献.....	71

1. 单摆模型

1.1 课程内容

本课程演示使用 **UM** 软件进行多体系统建模和仿真的基本流程。通过本课程的学习，读者将学会如何新建模型、创建几何、刚体和铰，以及如何通过数值仿真计算获得动力学模型的各种特性曲线。

本课程我们将完成一个经典的单摆模型（读者可以在本地路径 {**UM Data**} \SAMPLES \TUTORIAL \pendulum 找到这个模型）¹。这个模型由一个刚体（Pendulum）、一个转动铰（Rotational Joint）和支座（Support）组成，如图 1.1 所示。在完成建模工作后，我们将进行数值仿真计算。

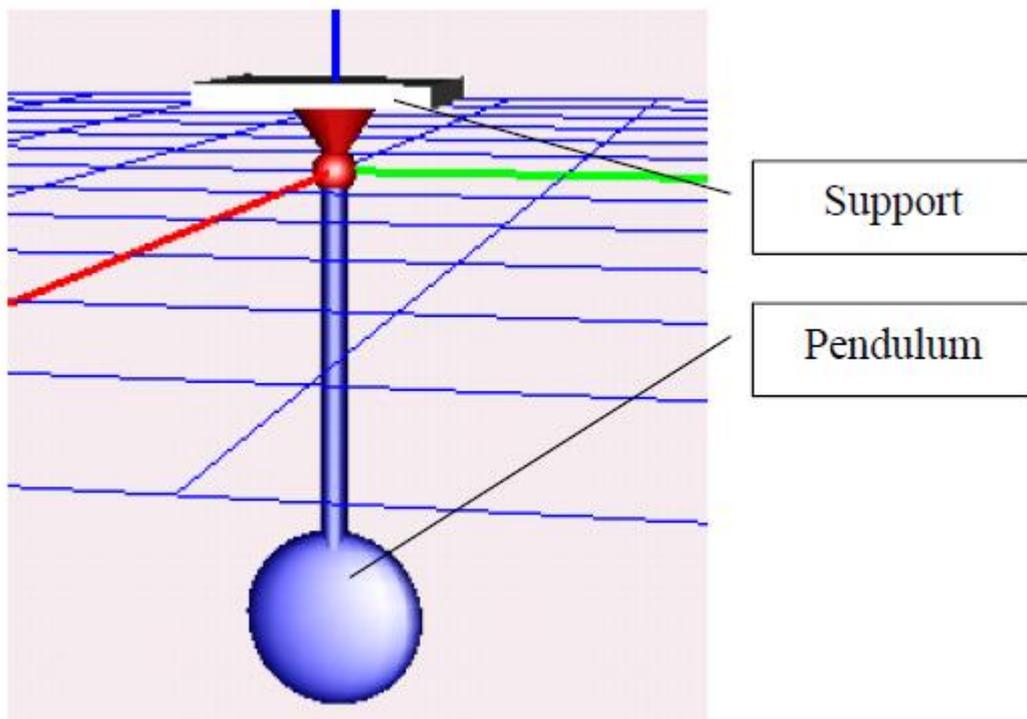


图 1.1 单摆模型

备注：UM 软件的工作目录 {**UM Data**} 路径缺省位于 **C:\Users\Public\Documents\UM Software Lab\Universal Mechanism\8**，安装完毕后用户可以在 **UM Input** 程序界面进行修改（**Tools-Options**）。

¹ 读者也可以从官方网站下载模型 <http://www.universalmechanism.com/download/80/eng/pendulum.zip>

1.2 模型简介

我们建议读者在使用 **UM** 软件进行建模之前，先动手绘制机构原理简图，如图 1.2 所示。

由简图可看出，这里有一个刚体和两个坐标系，其中 $Ox_0y_0z_0$ 为总体坐标系（记为 SC_0 ）， $C_1x_1y_1z_1$ 为刚体的局部坐标系（记为 SC_1 ）。转动铰中心位于 SC_0 原点， SC_1 原点设置在单摆质心处，且其坐标轴沿着单摆的惯性主轴。我们通常认为模型的总体坐标系与大地相连接。在这里，单摆和总体坐标系通过一个转动铰连接。

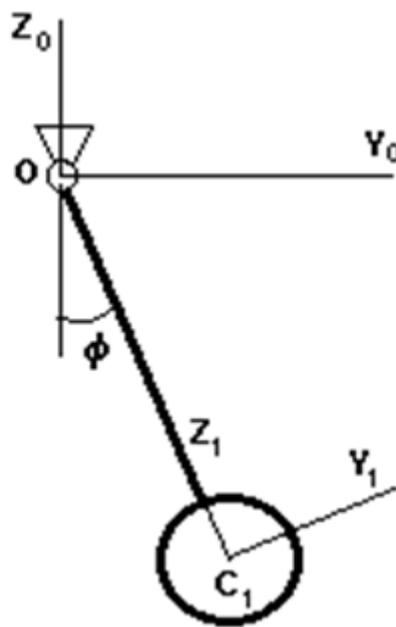


图 1.2 单摆简图

1.3 建模

1.3.1 运行 UM Input 程序和新建模型

运行 UM Input 程序

- 依次单击 开始 | 所有程序 | Universal Mechanism 8.5 | UM Input。

新建一个模型

- 选择菜单 File | New object, 新建一个 UM 模型, 如图 1.3 所示。

1.3.2 熟悉 UM Input 程序建模界面

请先用几分钟的时间熟悉一下 UM Input 程序建模界面, 如图 1.3 所示。

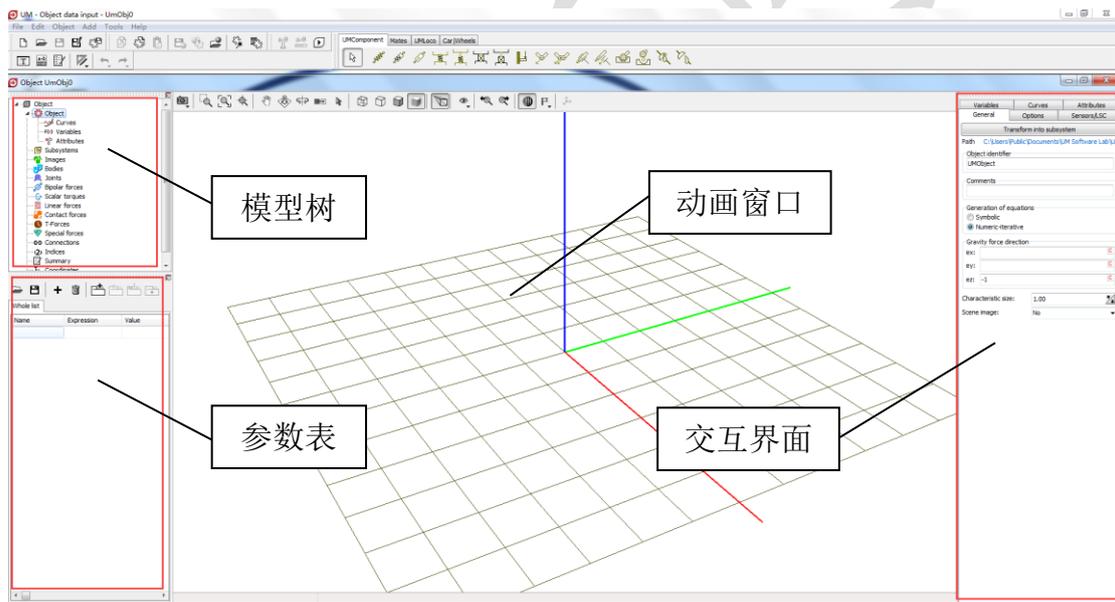


图 1.3 UM 建模界面

模型树: 位于界面左上角, 用于访问模型里的各种元素。

参数表: 位于界面左下角, 用于显示模型中用户自定义的标识符。

动画窗口: 位于界面中央, 用于显示整个模型或单个元素。窗口缺省显示总体坐标系: 红色为X轴, 绿色为Y轴, 蓝色为Z轴。通过窗口上部工具栏的图标可进行视角调整、缩放和其它设置, 通过鼠标右键菜单可设置透视和网格参数等。

交互界面: 位于界面右侧, 用于输入和修改当前元素的所有参数。

1.3.3 创建几何图形

我们建议读者在建立任何动力学模型时都从几何图形（GO）建模开始。

1.3.3.1 场景的几何图形

创建第一个几何图形：Scene

UM 里的 **Scene** 指的是场景，它用于赋给模型中始终与大地（总体坐标系）固接的元素。使用方法：先创建一个几何图形，再设置为 **Scene** 即可。请注意，并非每个模型都需要定义场景。在本例中，场景几何为 **Support**，也就是单摆铰接的地方。请按如下操作进行设置。

1. 先选中**模型树**里的 **Images**，然后点击交互界面的加号按钮 **+**，新建一个几何图形，如图 1.4 所示。

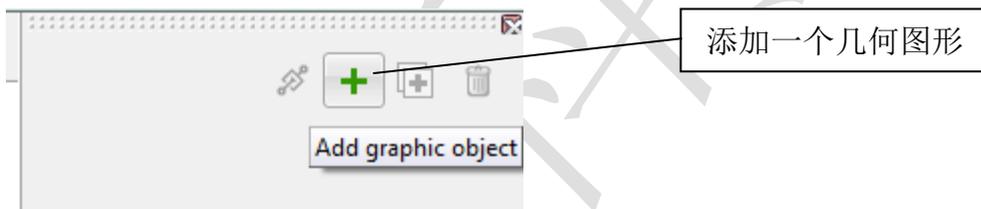


图 1.4 添加一个元素

备注：添加任何类型的元素都可采用这种方法。

重命名几何图形

在 UM 里新建一个元素时，程序会对其自动命名，缺省命名规则是“英文缩写+数字编号”，且这个数字编号在这一类元素中是唯一的。

第一步创建的几何图形自动命名为 **GO1**，我们将其更改为 **Support**（支持中文命名），如图 1.5 所示。



图 1.5 重命名几何图形

组装几何图形

在 UM 中，每一个几何图形（GO）可以由若干个基本的图形元素（GE）组合而成（ $GO=GE1 + GE2 + \dots$ ）。组合的方式就像搭积木，读者可以创建非常复杂的几何图形。这里，我们创建一个包含三个基本元素的几何体 **Support**: Ellipsoid（球体）、Cone（锥体）和 Box（块体）。

创建第一个图形元素：Ellipsoid

单击图 1.5 所示的“添加一个图形元素”按钮（第二行的加号），出现第一个图形元素 **GE1** 界面，如图 1.6 所示。

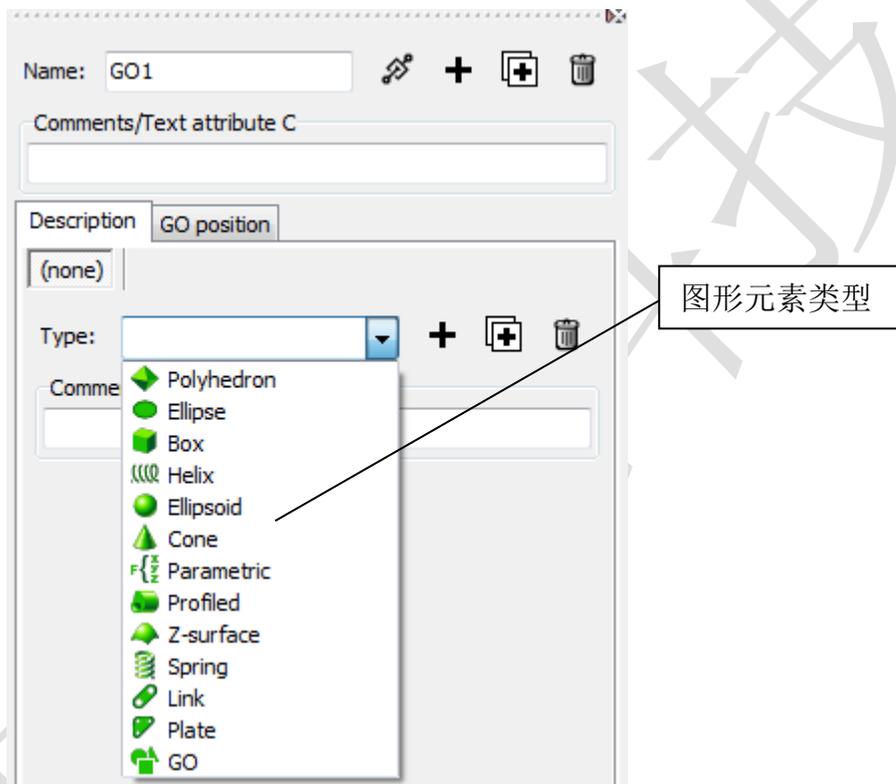


图 1.6 选择图形元素类型

1. 从 **Type** 下拉菜单选择图形元素类型 **Ellipsoid**。
2. 切换到 **Parameters** 页面，设置参数 $a = b = c = 0.05$ 。
3. 切换到 **Color** 页面，设置颜色 **Diffuse** 为红色。

创建第二个图形元素：Cone

1. 单击图 1.5 所示的“添加一个图形元素”按钮（第二行的加号），从 **Type** 下拉菜单选择图形元素类型 **Cone**。

备注：请注意不要点击第一行的加号按钮，否则会创建另一个几何图形。现在我们只需要创建一个几何图形 **Support**，它由三个图形元素组成：**Ellipsoid**、**Cone** 和 **Box**。

2. 切换到 **Parameters** 页面，设置参数 $R2 = 0.1$ ； $R1 = 0$ ； $h = 0.15$ 。
3. 切换到 **Color** 页面，设置颜色 **Diffuse** 为红色。

创建第三个图形元素：**Box**

1. 单击图 1.5 所示的“添加一个图形元素”按钮（第二行的加号），从 **Type** 下拉菜单选择图形元素类型 **Box**。
2. 切换到 **Parameters** 页面，设置参数 $A = 0.5$ ； $B = 0.5$ ； $C = 0.05$ 。
3. 切换到 **GE Position** 页面，设置垂向移动距离 **Translation | Z** 为 0.15 ，如图 1.7 所示。

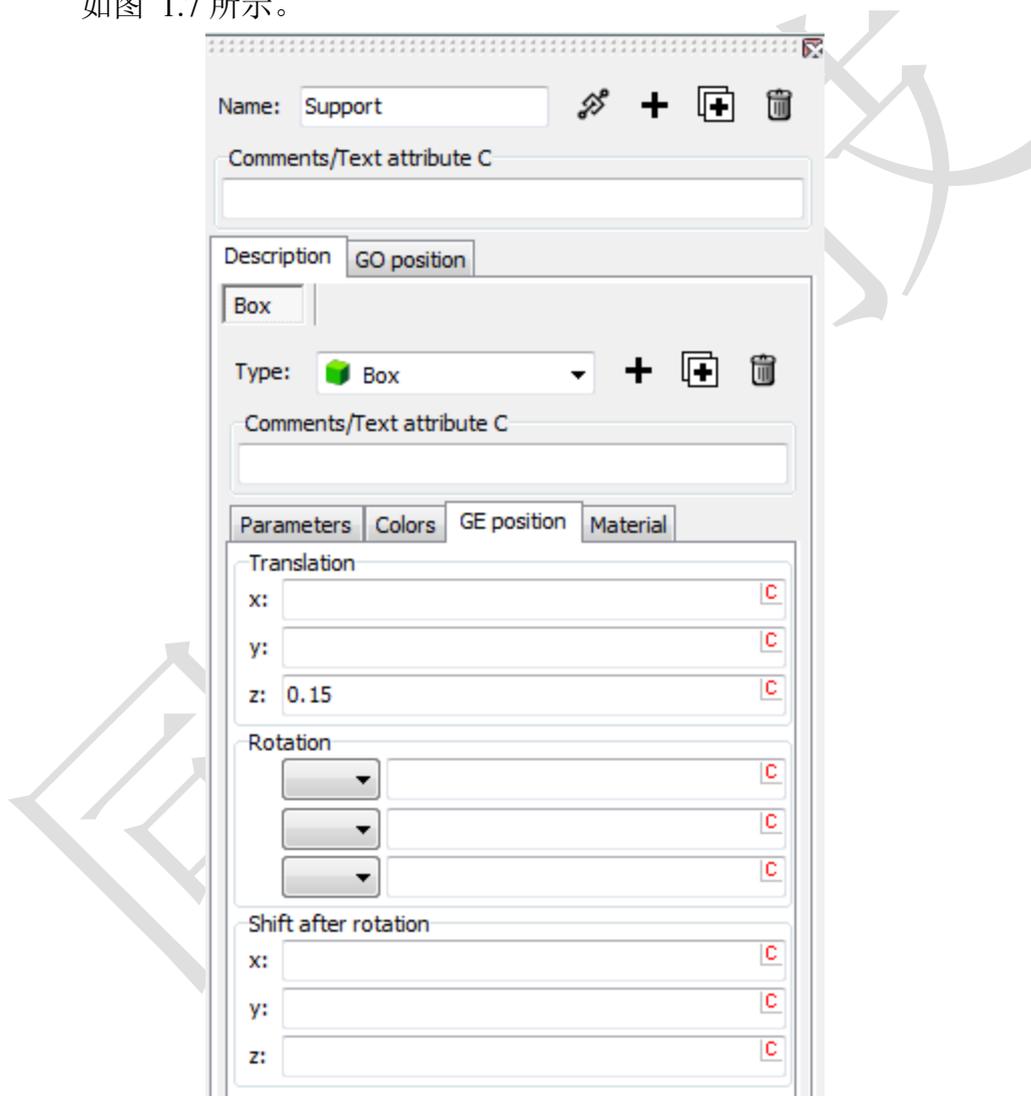


图 1.7 设置图形元素位置

定义 Support 为场景几何

1. 选中左侧模型树的 Object。
2. 在右侧交互界面界面 Scene image 处选择 Support 作为场景几何，如图 1.8 所示。

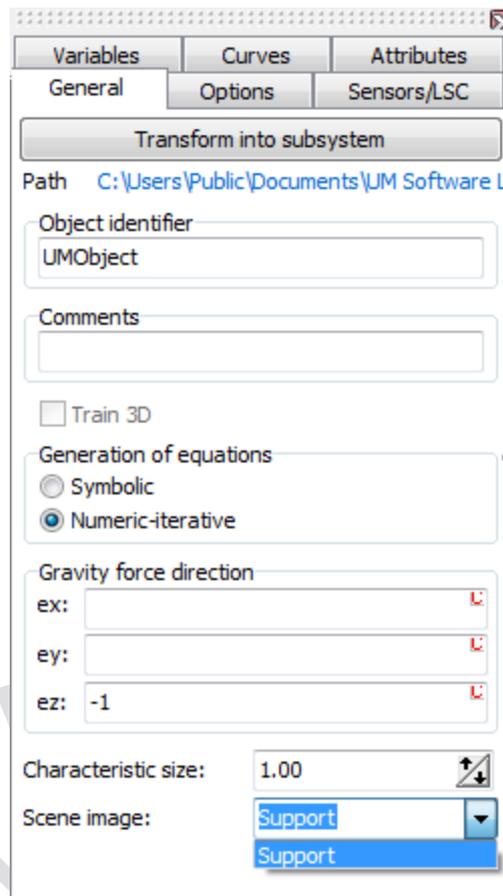


图 1.8 选择场景几何

1.3.3.2 单摆的几何图形

单摆的几何图形由两个图形元素组成：Ellipsoid 和 Cone。

1. 选中左侧**模型树**的 **Image**。
2. 点击**交互界面**第一行的**加号**按钮，创建第二个几何图形。
3. 重命名为 **Pendulum**。

备注：每当修改文本或数据时，务必回车确认。

4. 点击**交互界面**第二行的**加号**按钮，创建一个图形元素，选择椭球体类型 **Ellipsoid**，设置参数 $a = 0.05$ ； $b = 0.2$ ； $c = 0.2$ ，并设置颜色为蓝色。
5. 添加一个图形元素，选择圆锥体类型 **Cone**，设置参数 $R2 = 0.03$ ； $R1 = 0.03$ ； $h = 1$ ，并设置颜色为蓝色。

至此，我们完成了单摆几何图形的建模工作。

1.3.4 创建刚体

本例的单摆模型有且仅有一个刚体。

1. 选中左侧**模型树**的 **Bodies**。
2. 点击交互界面的加号按钮，创建一个刚体，如图 1.9 所示。

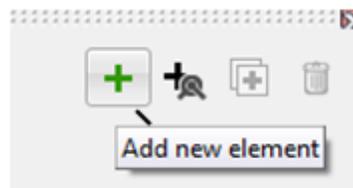


图 1.9 添加一个刚体

3. 重命名为 **Pendulum**（支持中文命名）。
4. 从交互界面中部 **Image** 处下拉菜单选择 **Pendulum** 几何图形。
5. 设置质量参数 **Mass = 1 (kg)**，如图 1.10 所示。

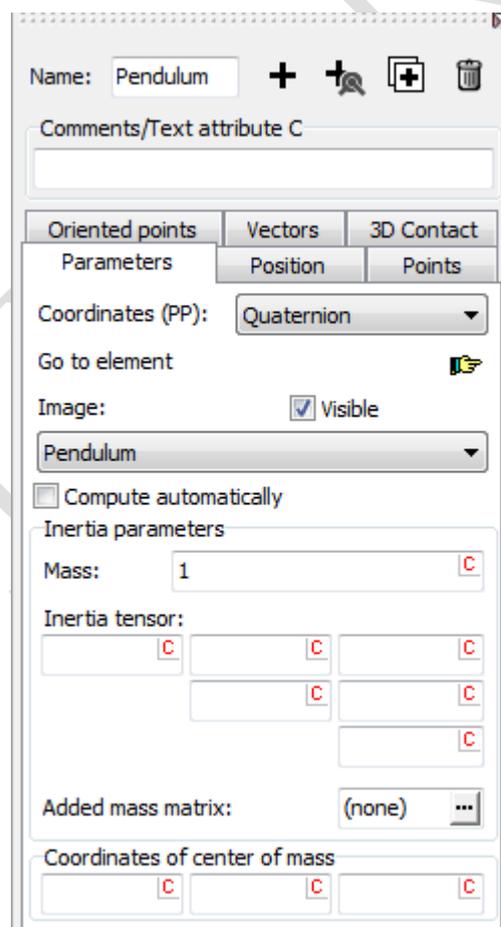


图 1.10 定义刚体参数

1.3.5 创建铰

单摆刚体（Pendulum）和大地（Base0）通过一个转动铰（Rotational Joint）建立联系。

1. 选中左侧**模型树**的 **Bodies | Pendulum**。
2. 在右侧**交互界面**单击按钮, 并依次选择 **Create joint | Rotational**, 如图 1.11 所示。

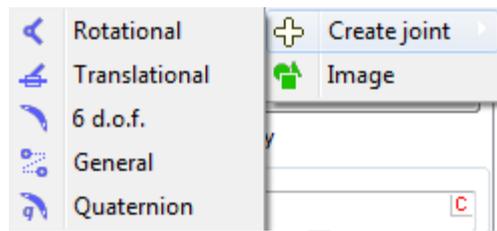


图 1.11 创建转动铰

经过如上操作, 自动创建了一个名为 **jPendulum** (支持中文命名) 的转动铰。**Joint points** 和 **Joint vectors** 分别用于描述两个物体的相对位置以及转动轴方向, 其坐标值为各自坐标系中的局部坐标。

3. 在 **Joint points** 参数框定义 **Pendulum** 的 **Z** 坐标为 **1**, 这样单摆将绕着其定点转动, 如所示。

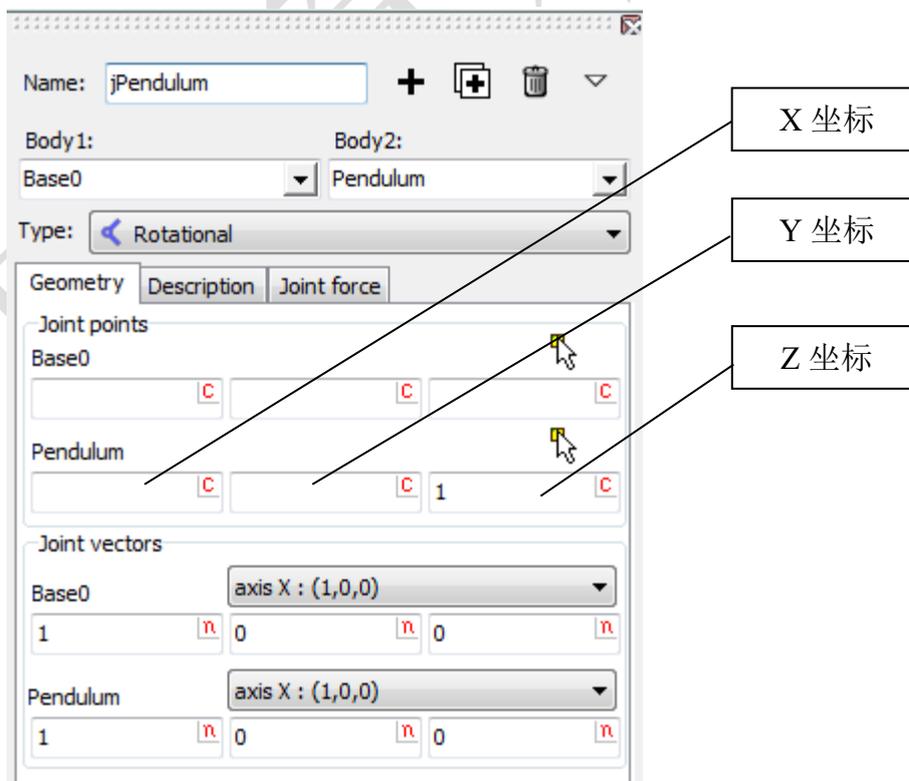


图 1.12 设置转动铰参数

1.3.6 保存模型

至此，单摆模型完成所有建模工作，我们需要将其保存，并把模型命名为 **Pendulum**（支持中文命名）。

1. 选择菜单 **File | Save as...**。
2. 设置保存路径为 `{UM Data}\My models\Pendulum`（可自定义路径），如图 1.13 所示。

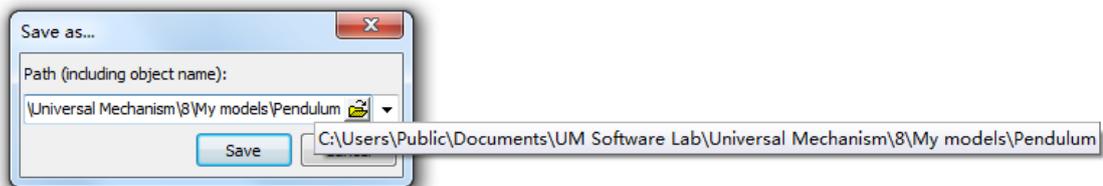


图 1.13 保存模型

备注：{UM Data}为 UM 的数据目录，缺省为“C:\Users\Public\Documents\UM Software Lab\Universal Mechanism\8”。每个 UM 模型对应一个文件夹，模型名称 Pendulum 即为文件夹名称。

1.3.7 运行 UM Simulation 程序

现在，我们的单摆模型可以进行仿真计算。

1. 选择菜单 **Object | Simulation**，运行 **UM Simulation** 程序，并自动加载当前的单摆模型。

备注：当 UM Simulation 仿真程序运行时，最好将 UM Input 程序关闭，以免两个程序同时访问同一个模型而造成数据混乱。

1.4 仿真

现在，我们已经进入了仿真程序界面，我们将打开一些动画窗口，并把单摆转动，使之与 Z 轴偏离 1 弧度，然后开始仿真计算。

打开动画窗口

选择菜单 **Tools | Animation window**，即可打开一个动画窗口（这一步可以不用做，因为 **UM Simulation** 加载模型时已经自动打开了以动画窗口）。请熟悉动画窗口的基本操作。

转动操作  (工具栏图标)

将鼠标光标移动到动画窗口，按下鼠标左键同时移动鼠标，即进行转动操作。

平移操作  (工具栏图标)

将鼠标光标移动到动画窗口，按下 **Ctrl** 键和鼠标左键同时移动鼠标，即进行平移操作。

缩放操作  (工具栏图标)

将鼠标光标移动到动画窗口，按下 **Shift** 键和鼠标左键同时移动鼠标，即进行缩放操作。

调整视图后，动画窗口显示如图 1.14。

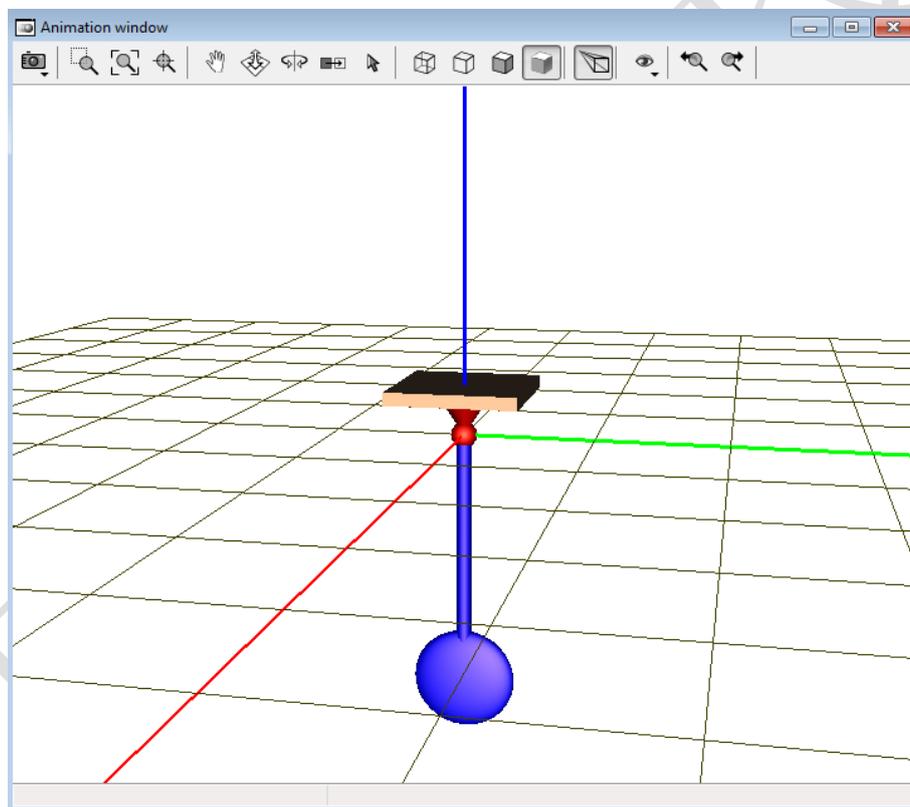


图 1.14 动画窗口显示的单摆模型

开始仿真

1. 选择菜单 **Analysis | Simulation**，弹出 **Object simulation inspector** 仿真控制界面，如图 1.15 所示。

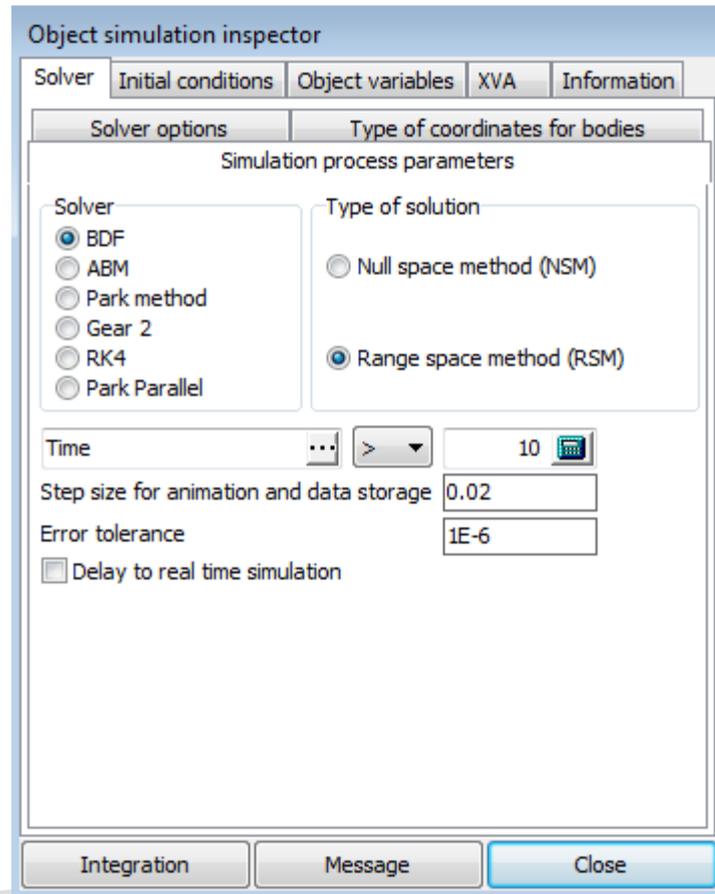


图 1.15 仿真控制界面

初始条件

为了使单摆发生运动，我们需要把它先偏离一定角度。这里我们有专门的“初始条件”工具可以进行定义。

1. 在 **Object simulation inspector** 仿真控制界面选择 **Initial conditions | Coordinates**。

这里用于显示模型所有的铰坐标，对于单摆模型，有且仅有一个铰坐标。

2. 设置初始坐标 **Coordinate** 为 **1**，然后回车，这样单摆初始就有了偏离，如图 1.16 所示。

备注：UM 软件采用国际单位制（SI），角度单位为弧度。

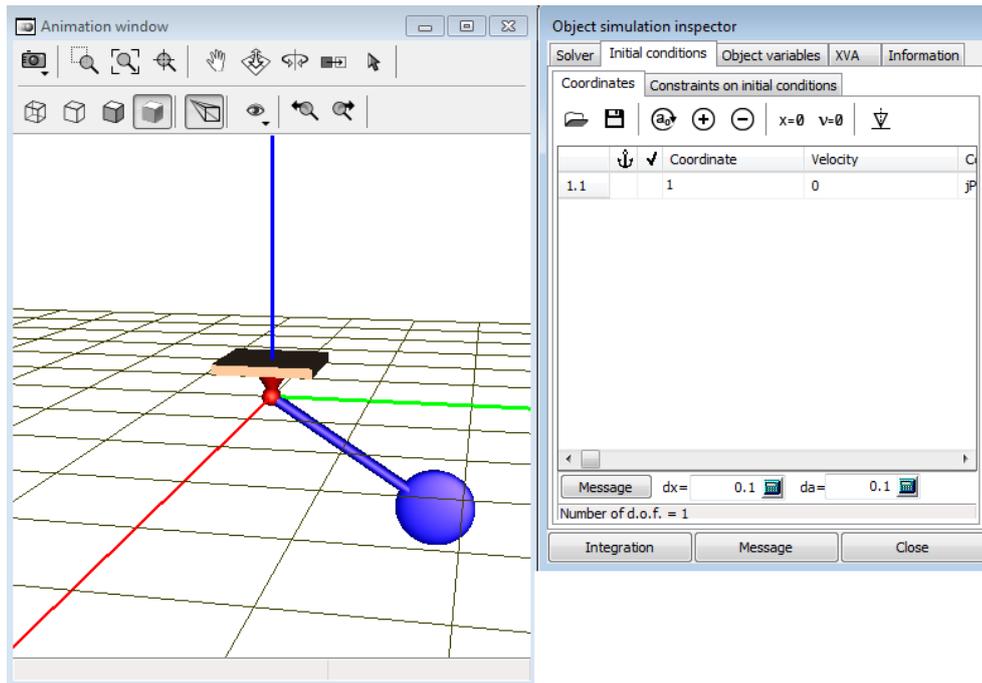


图 1.16 定义初始单摆的初始条件

仿真计算

现在你的模型可以进行仿真计算，不妨直接算 10 秒工况试试。

1. 在 **Object simulation inspector** 仿真控制界面点击 **Integration** 按钮。

仿真开始，**Process parameters** 窗口会出现在屏幕右下角，显示当前计算进度，如图 1.17 所示。

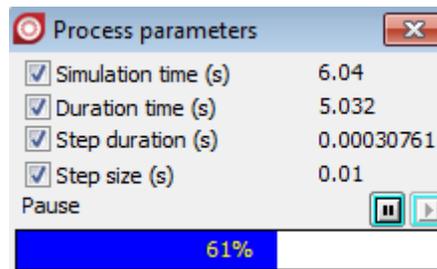


图 1.17 仿真进度

当仿真结束时，**Pause** 窗口会弹出，如图 1.18 所示。此时，你可以增加仿真时间，或者修改积分方法及参数。

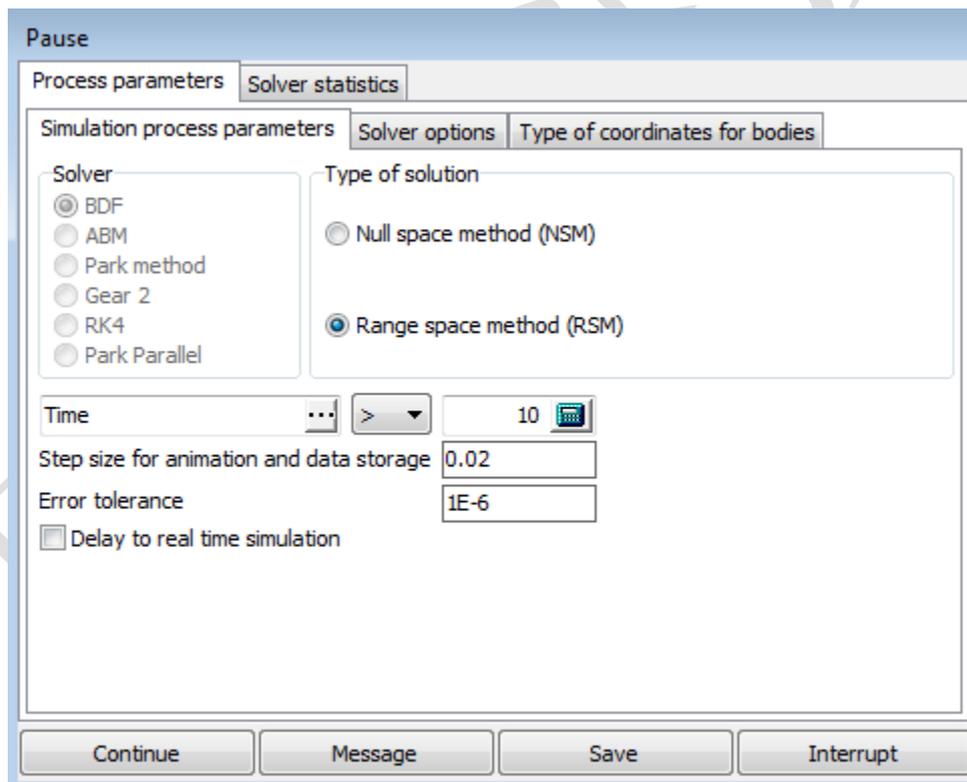


图 1.18 暂停窗口

2. 在 **Pause** 窗口点击 **Interrupt** 按钮，又回到了 **Object simulation inspector** 仿真控制界面。

绘制曲线

在仿真进行过程中,你可以同步观察不同变量的时程曲线。诸如位移、速度、加速度和力等。这里,我们举例演示:定义并观察单摆刚体质心横坐标的变化。

首先,打开一个绘图窗口。

1. 选择菜单 **Tools | Graphic window**。

然后,打开变量向导。

2. 选择菜单 **Tools | Wizard of variables**。

Wizard of variables 是专门用于创建各种变量的工具,这些变量既可以是标量,也可以是矢量和轨迹,分别在绘图窗口和动画窗口显示,如所示。

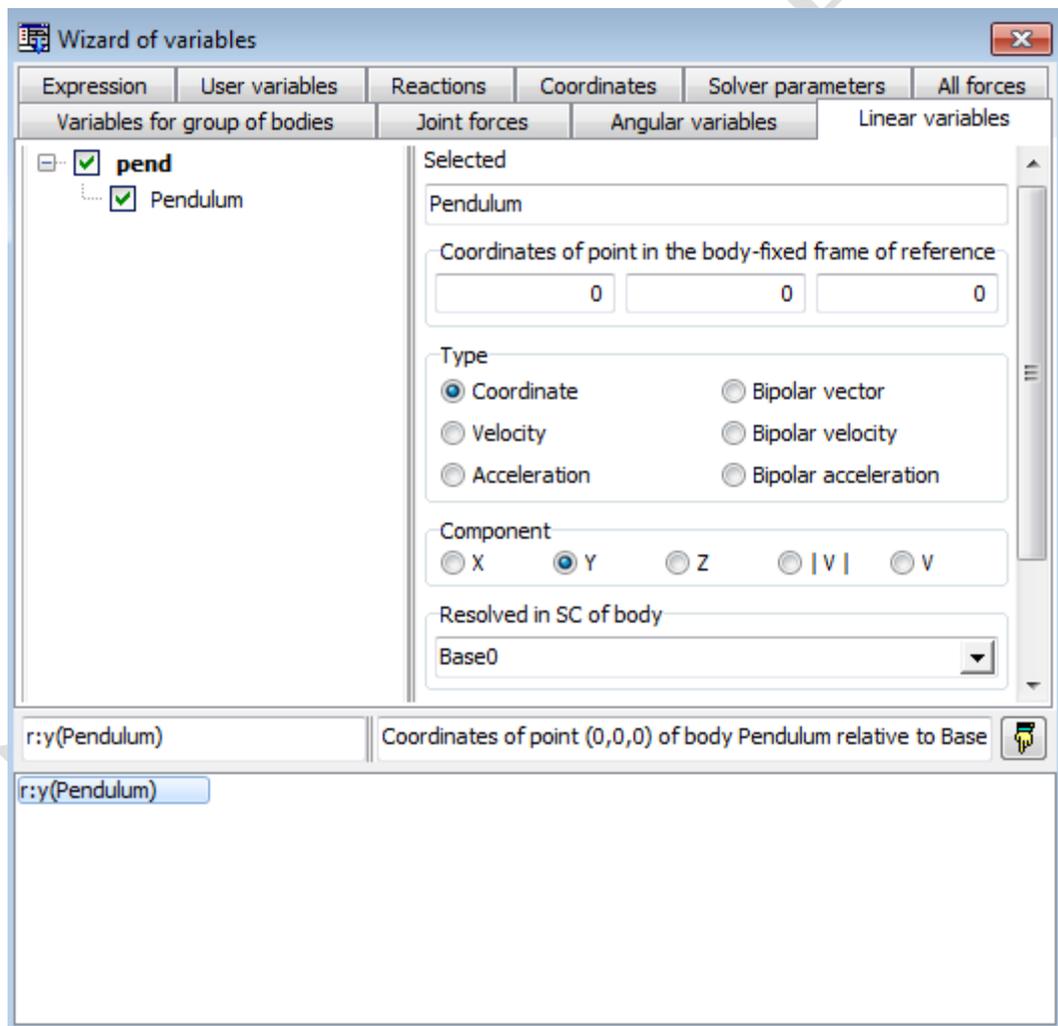


图 1.19 变量向导窗口

下面,我们来绘制单摆刚体质心横坐标的时程图。

1. 先在 **Wizard of variables** 变量向导窗口选择 **Linear variables** (刚体的位移、速度和加速度)。

2. 接着在 **Component** 参数框选择 **Y** 分量。

3. 然后点击右下角的手形按钮 , 这样就创建了变量 **r:y(Pendulum)**, 并

暂存于下方的变量框。

- 选中变量框中的变量 **r:y(Pendulum)**，并将其拖入我们之前创建的绘图窗口。
- 在 **Object simulation inspector** 仿真控制界面点击 **Integration** 按钮开始仿真，可以看到绘图窗口中显示了变量 **r:y(Pendulum)**的时程曲线，如图 1.20 所示。

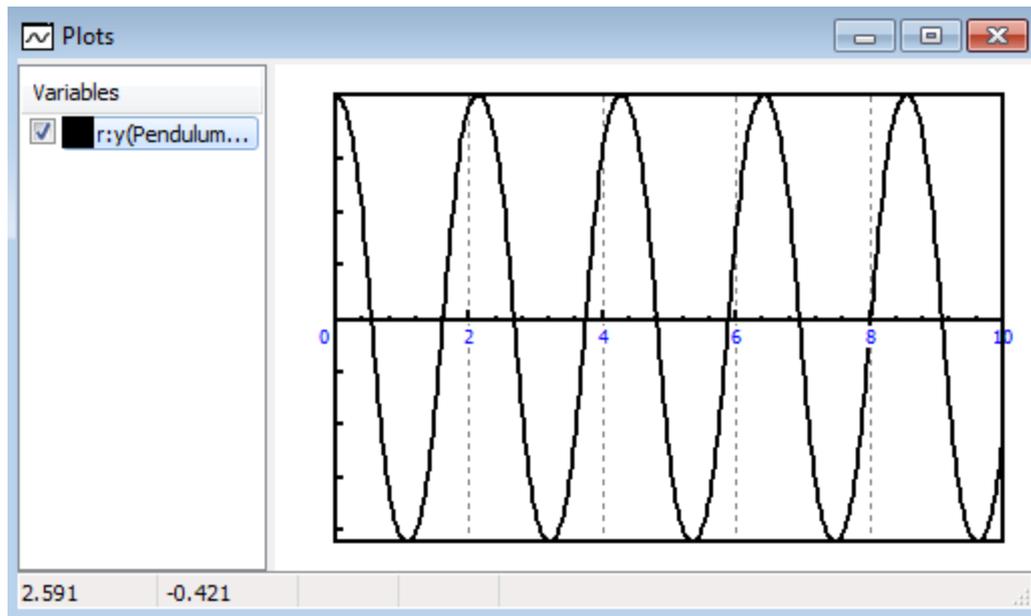


图 1.20 绘制变量时程曲线

动态矢量和轨迹

在仿真进行过程中，可以在动画窗口动态显示矢量。这里我们演示如何显示单摆刚体质心的速度矢量。首先，我们需要在 **Wizard of variables** 变量向导里创建相应的矢量变量。如果在之前的操作中不慎将变量向导窗口关闭，请不必担心，通过菜单 **Tools | Wizard of variables** 重新打开即可。

- 先在 **Wizard of variables** 变量向导窗口选择 **Linear variables**。
- 接着在 **Type** 参数框选择 **Velocity** 速度变量(缺省为位移变量 **Coordinate**)。
- 然后在 **Component** 参数框选择 **V** 分量(表示矢量 **Vector**)。
- 再点击右下角的手形按钮 ，创建速度变量 **v:v(Pendulum)**，并暂存于下方的变量框。
- 选中变量框中的变量 **v:v(Pendulum)**，并将其拖入我们之前创建的动画窗口。

备注：在动画窗口中的矢量变量列表缺省为隐藏状态，读者可以在动画窗口的右键菜单让其显示在所需位置。

- 将光标移动到动画窗口，点**右键**，选择 **Position of list of vectors | Bottom**。下面，我们再定义一个单摆刚体质心的轨迹变量。

7. 重复以上几步操作（注意第二步中 **Type** 选择 **Coordinate**），定义轨迹变量 **r:v(Pendulum)**并拖入动画窗口。
8. 在动画窗口底部**矢量列表区**分别双击**速度变量**和**轨迹变量**，将缺省颜色修改为**红色**和**蓝色**。
9. 在 **Object simulation inspector** 仿真控制界面点击 **Integration** 按钮开始仿真。

这时，可以看到在动画窗口实时显示了单摆质心的速度矢量和运动轨迹，如图 1.21 所示。如果需要，可以通过右键菜单 **Vectors settings** 修改各种矢量的比例尺。

双击某个矢量，可以修改其颜色。对于轨迹变量，还可以修改显示的点数。

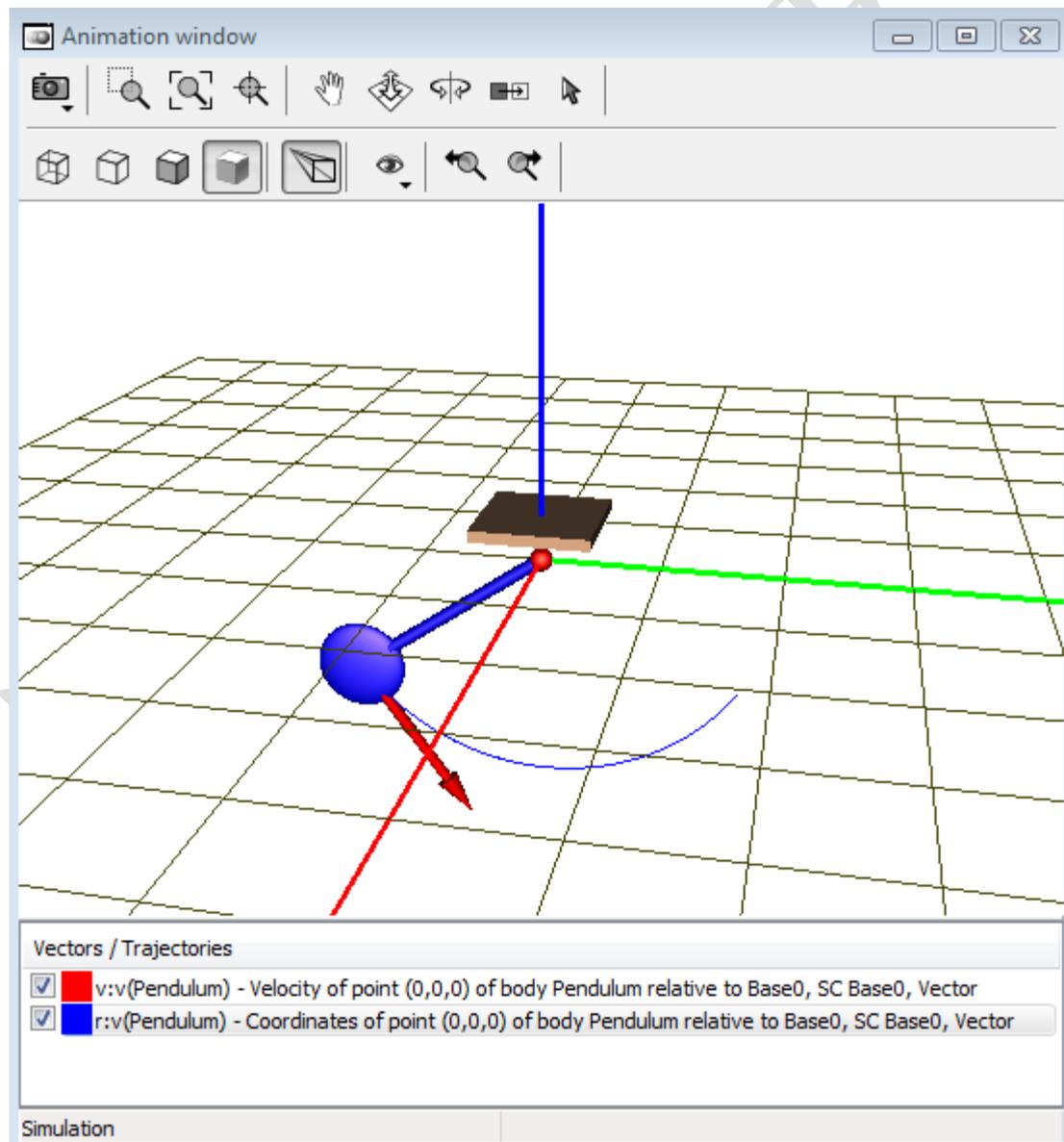


图 1.21 动态显示单摆质心速度矢量和运动轨迹

2. 自由振动与受迫振动

2.1 课程内容

本课程演示如何在 **UM** 模型里定义力，如何用时间函数驱动刚体的运动，以及模型参数化。我们将使用 **Linear analysis** 线性分析工具计算系统的平衡位置，获得其固有频率和振型。此外，我们还会用到 **Statistics** 统计工具分析变量结果的功率谱。

2.2 模型简介

我们考虑一个经典的“弹簧-阻尼”系统的自由振动和受迫振动两种工况。在本课程中，我们将建立如图 2.1 所示的模型。该模型由两个刚体 **Top** 和 **Brick**、两个平动铰、一个线性弹簧和一个线性阻尼器组成。其中，刚体 **Top** 的运动是时间函数（正弦函数）驱动的。

读者可以在本地路径 `{UM Data}\SAMPLES\TUTORIAL\oscillator` 找到这个模型²。

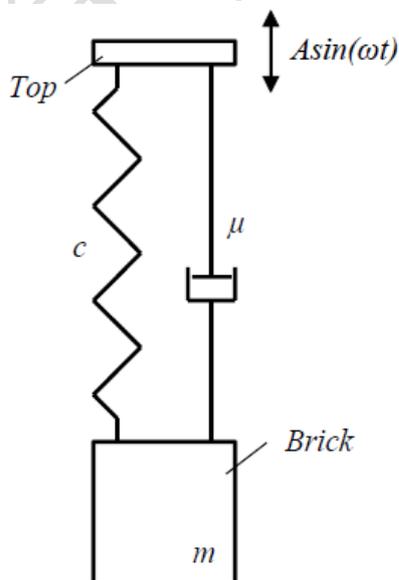


图 2.1 模型简图

² 读者也可以从官方网站下载模型 <http://www.universalmechanism.com/download/80/oscillator.zip>

2.3 建模

2.3.1 运行 UM Input 程序和新建模型

运行 UM Input 程序

1. 依次单击 开始 | 所有程序 | Universal Mechanism 8.0 | UM Input。

新建一个模型

2. 选择菜单 **File | New object**, 新建一个 UM 模型。

2.3.2 创建几何图形

Top

这里我们来创建一个矩形薄板作为刚体 **Top** 的几何图形。

1. 添加一个几何图形（GO）。
2. 重命名为 **Top**。
3. 添加一个图形元素（GE），选择类型 **Box**。
4. 设置 **Box** 的尺寸（Parameters）和位置（GE Position）参数，如图 2.2 所示。
5. 设置颜色为蓝色。

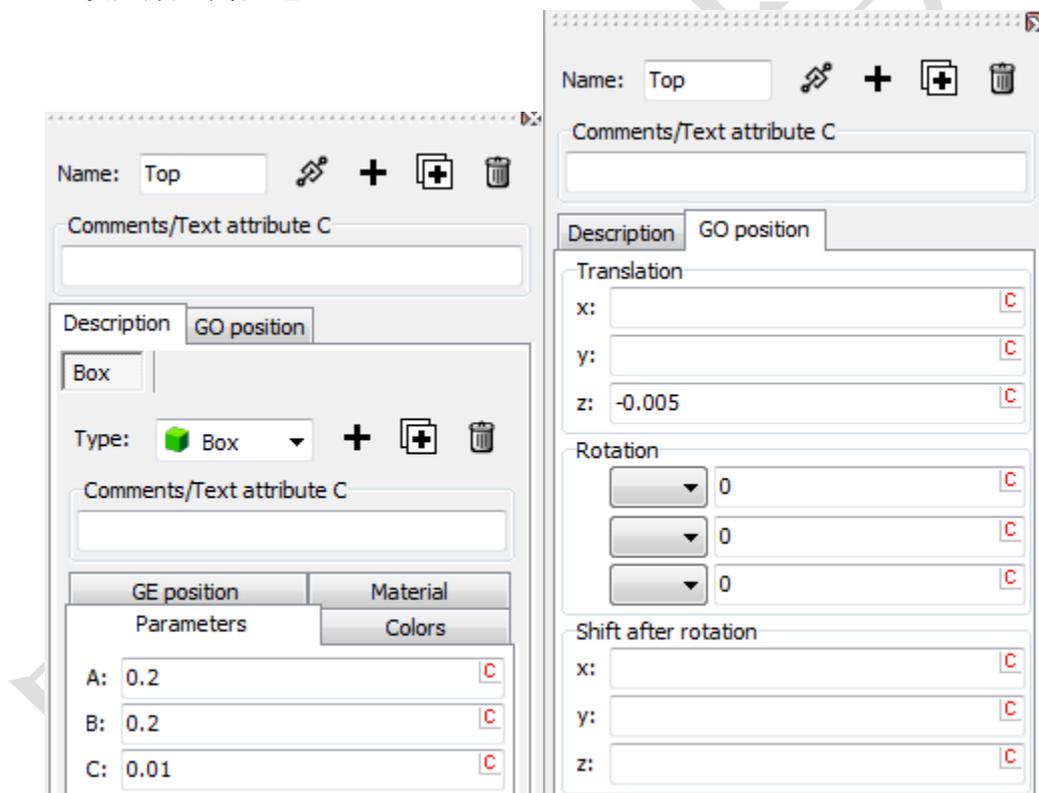


图 2.2 创建 Top 的几何图形

Brick

这里我们来创建一个边长为 0.2m 的正方体作为刚体 **Brick** 的几何图形。

1. 添加一个几何图形（GO）。
2. 重命名为 **Brick**。
3. 添加一个图形元素（GE），选择类型 **Box**。
4. 设置 **Box** 的尺寸（Parameters）和位置（GE Position）参数，如图 2.3 所示。
5. 设置颜色为红色。

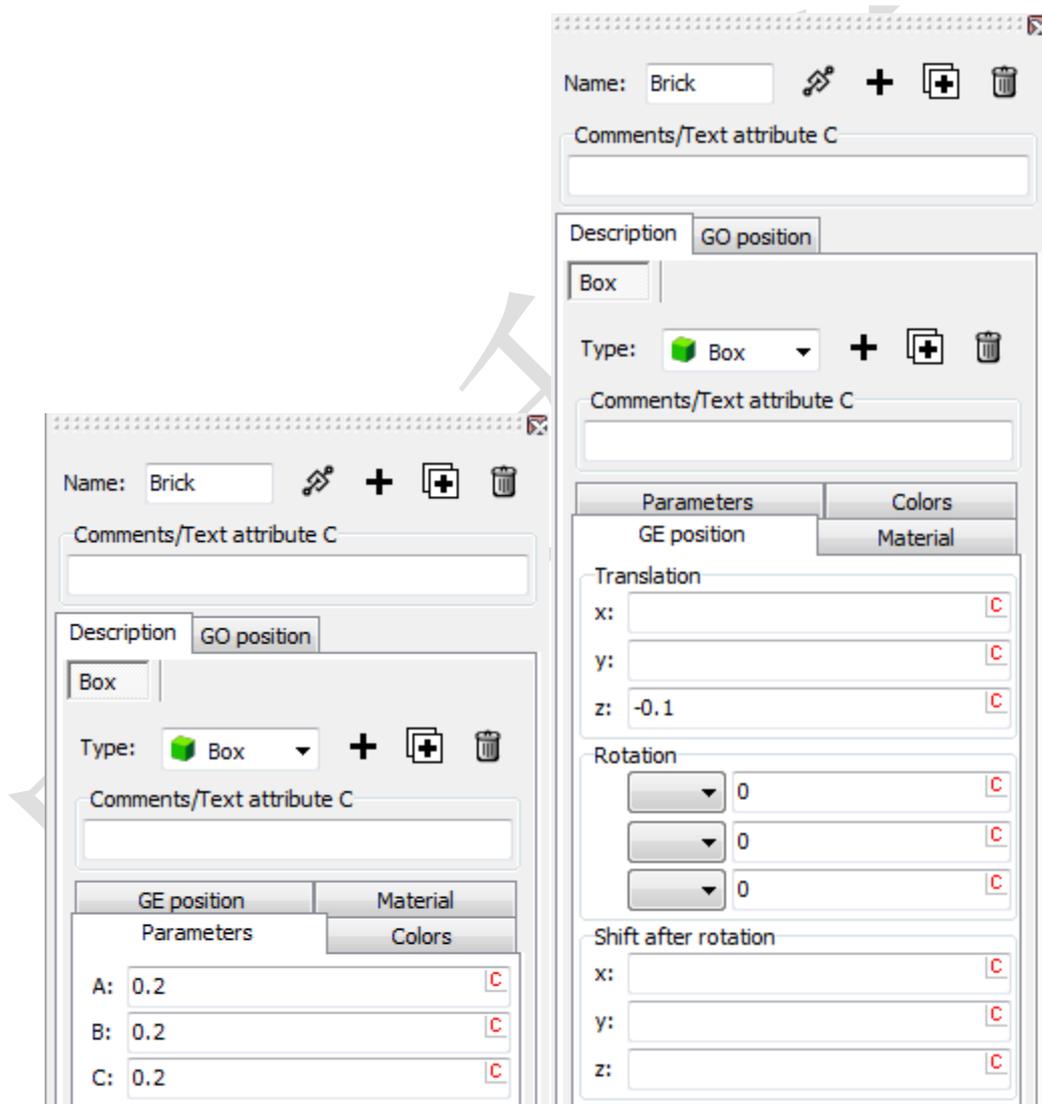


图 2.3 创建 Brick 的几何图形

Spring

现在我们来创建一个弹簧的几何图形。

1. 添加一个几何图形（GO）。
2. 重命名为 **Spring**。
3. 添加一个图形元素（GE），选择类型 **Spring**。
4. 设置 **Spring** 的尺寸（Parameters）参数，如图 2.4 所示。
5. 设置颜色为红色。

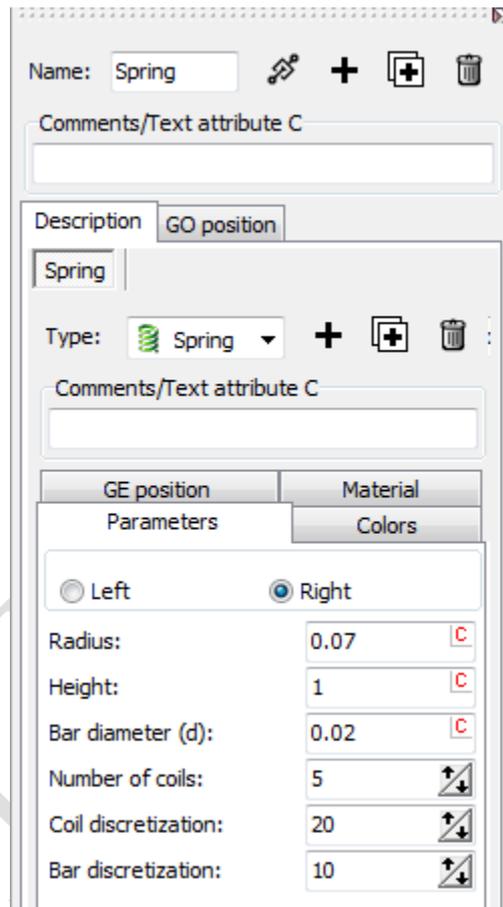


图 2.4 创建 Spring 的几何图形

Damper

现在我们来创建最后一个所需的几何图形 **Damper**，如图 2.5 所示。

1. 添加一个几何图形 (GO)。
2. 重命名为 **Damper**。
3. 添加第一个图形元素 (GE)，选择类型 **Cone**。
4. 设置 **Cone** 的参数如下：

$$R2 = 0.02;$$

$$R1 = 0.02;$$

$$H = 1。$$

5. 设置颜色为蓝色。
6. 添加第二个图形元素 (GE)，选择类型 **Cone**，并设置参数如下：

$$R2 = 0.04;$$

$$R1 = 0.04;$$

$$H = 0.5。$$

设置位置参数 (GE position)，**Translation | Z = 0.25**，设置颜色为红色。

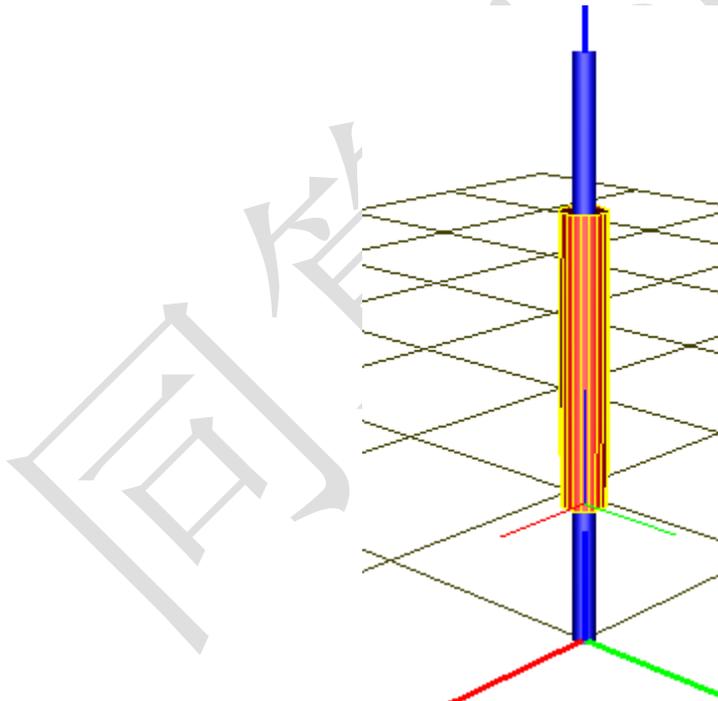


图 2.5 Damper 几何图形

2.3.3 创建刚体

Top

我们来创建第一个刚体 **Top**。

1. 添加一个刚体。
2. 重命名为 **Top**。
3. 从 **Image** 下拉菜单中选择 **Top**，如图 2.6 所示。
4. 保持质量 (**Mass**) 和惯性张量 (**Inertia tensor**) 参数为空。

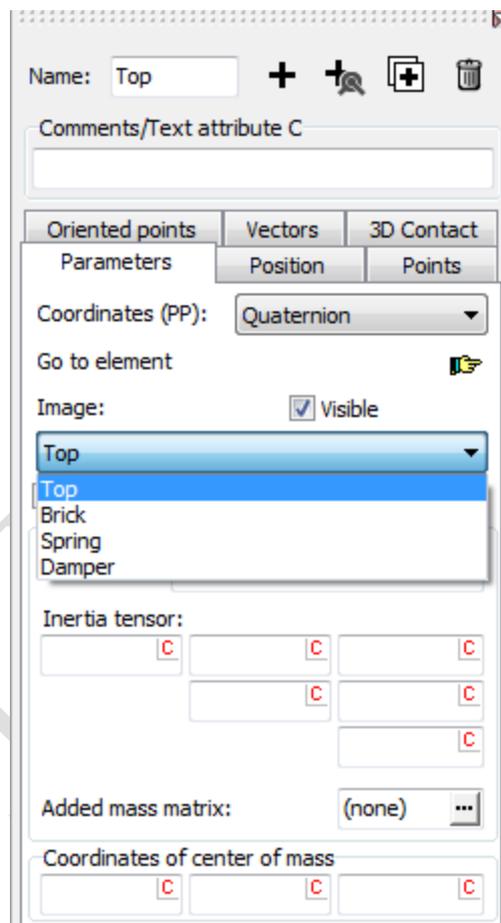


图 2.6 创建刚体 Top

Brick

现在我们来创建第二个刚体 **Brick**。可以用参数符号（identifier）来定义它的质量。参数化建模的优势在于我们可以很方便地在仿真窗口修改数值，不必回到建模窗口去修改，而且不用重新生成运动方程。

1. 添加一个刚体。
2. 重命名为 **Brick**。
3. 从 **Image** 下拉菜单中选择 **Brick**。
4. 设置质量（**Mass**）为 **m**，回车，弹出初始赋值（**Initialization of value**）窗口。
5. 设置参数值（**Value**）为 **10**，并回车确认。
6. 此时，这个新的参数符号 **m** 就添加到左下方的参数表，如图 2.7 所示。

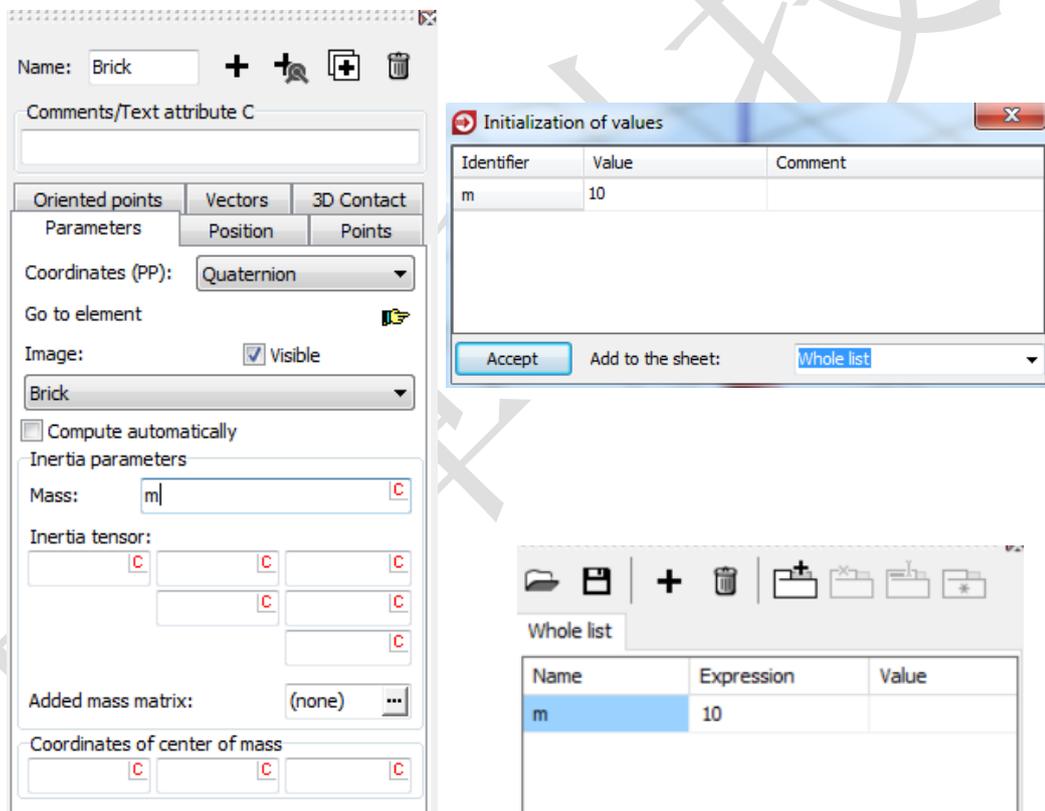


图 2.7 创建刚体 Brick

2.3.4 创建铰

刚体 Top 的铰

刚体 **Top** 沿着垂向做正弦运动，驱动函数为 $Asin(\omega t)$ 。下面我们来定义刚体 **Top** 相对大地 **Base0** 的平动铰。

1. 先选中左侧**模型树**里的刚体 **Top**。
2. 然后在右侧**交互界面**单击按钮, 并依次选择 **Create joint | Translational**, 如图 2.8 (左) 所示。这样就创建了刚体 **Top** 相对大地 **Base0** 的平动铰。
3. 在 **Geometry** 页面设置平动铰的参数, 如图 2.8 (右) 所示。

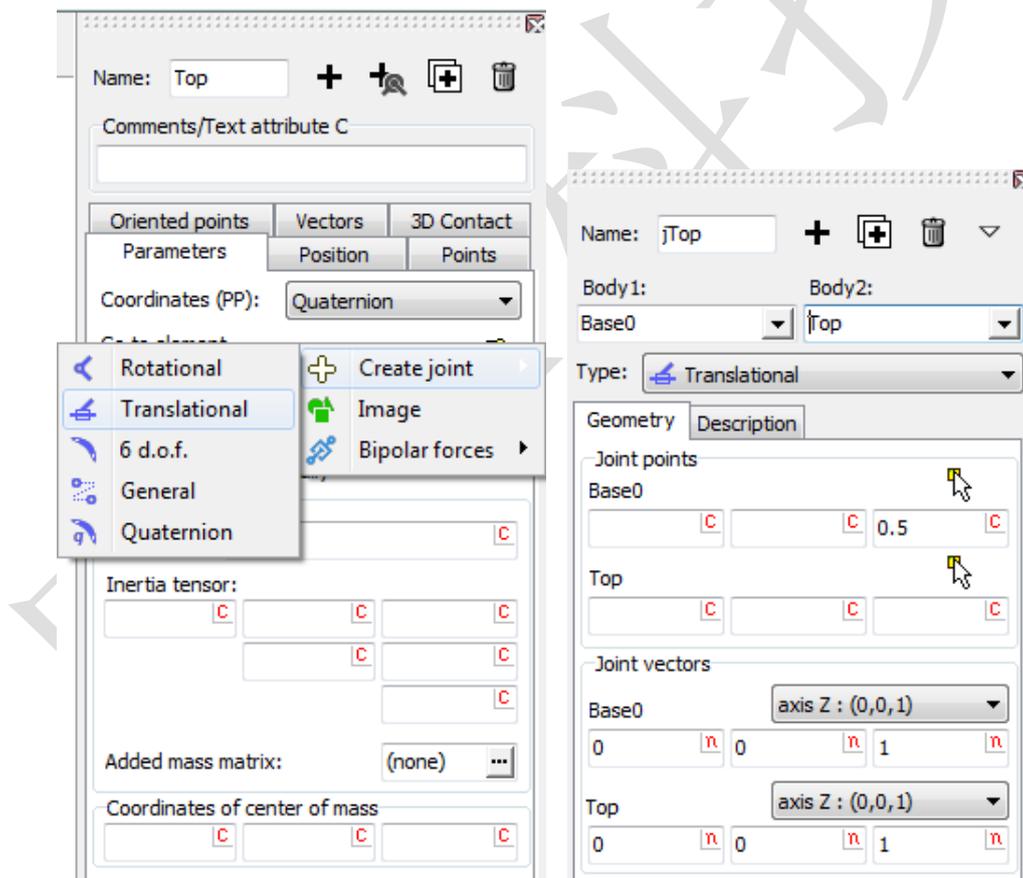


图 2.8 创建平动铰

4. 切换到 **Description** 页面。
5. 勾选 **Prescribed function of time** 选项，弹出提示框 replace existing element, 点击“是”。
6. 设置函数类型 (**Type of description**) 为表达式 **Expression**，然后输入 **$a*\sin(\omega*t)$** ，如图 2.9 所示，并回车。

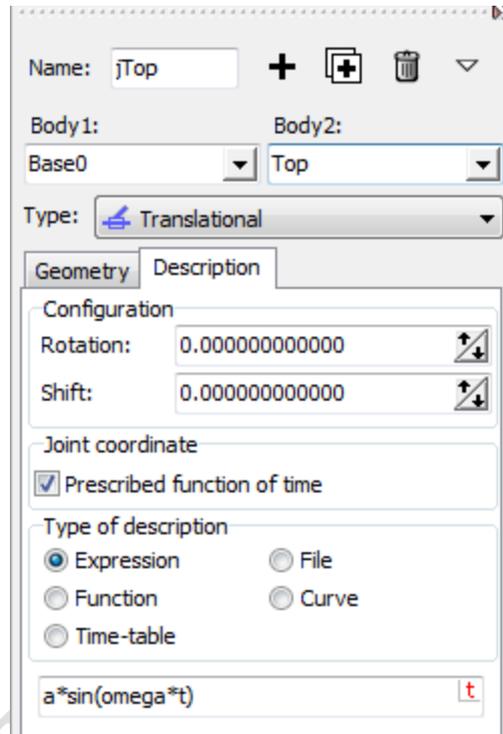


图 2.9 定义时间函数驱动

7. 在初始赋值 (**Initialization of values**) 窗口设置 **$a = 0.05$ (m)**， **$\omega = 10$ (rad/s)**，如图 2.10 所示。

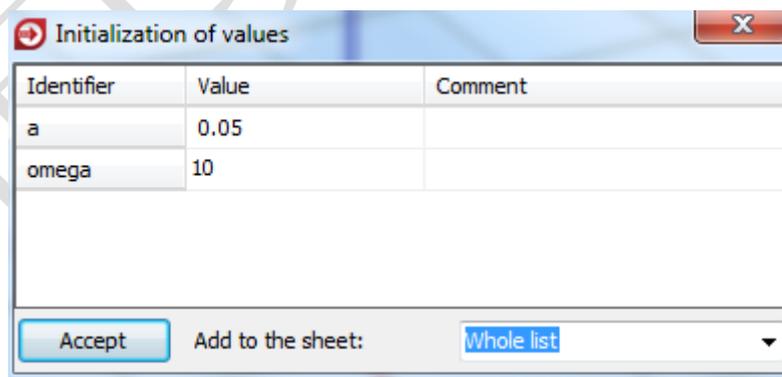


图 2.10 初始赋值窗口

刚体 Brick 的铰

1. 先选中左侧模型树里的刚体 **Brick**。
2. 然后在右侧交互界面单击按钮 。
3. 依次选择 **Create joint | Translational**。
4. 在 **Body1** 处下拉菜单选择刚体 **Top**, 替换缺省的 **Base0**, 如图 2.11 所示。
5. 在 **Geometry** 页面设置平动铰的参数, 如图 2.11 所示。

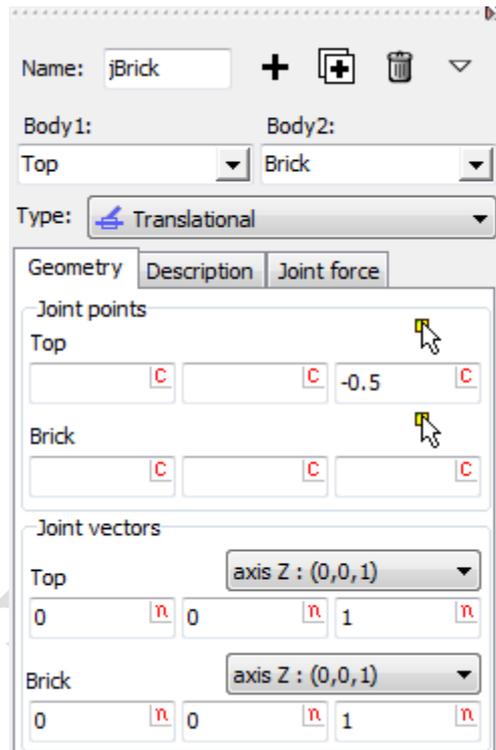


图 2.11 Brick 铰的参数

2.3.5 创建力元

现在我们来描述 **Top** 和 **Brick** 两个刚体之间的弹簧力和阻尼力。这里用符号 **c** 表示弹簧元件的刚度系数，符号 **mu** 表示阻尼元件的阻尼系数。弹簧的自然长度定义为 **Length**。

1. 先选中左侧**模型树**里的铰 **jBrick**。
2. 然后点击右侧**交互界面**的 **Joint force**。
3. 从 **Type** 下拉菜单中选择 **Linear** 线性力元。
4. 分别在 **Stiffness coef. (c)**一栏输入符号 **c**，**Coordinate (x0)**一栏输入符号 **Length**，**Damping coef. (d)**一栏输入符号 **mu**，并回车，如图 2.12 所示。。参数分别赋予初值：**c = 250**，**Length = 0.4**，**mu = 5**。

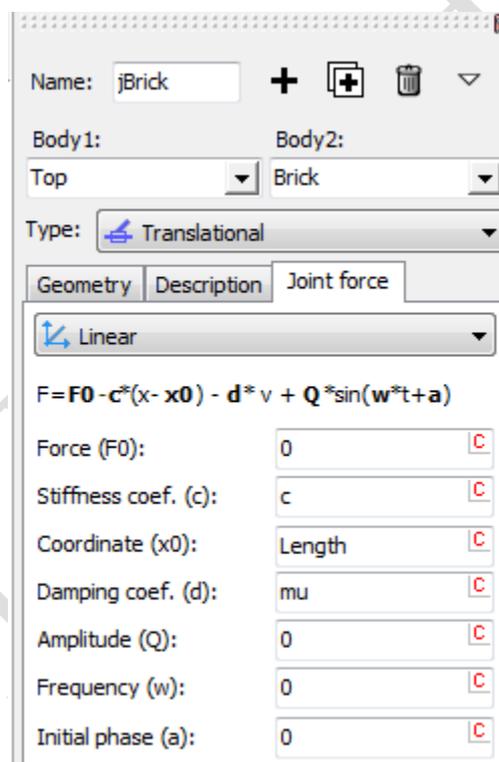


图 2.12 定义弹簧和阻尼力元参数

2.3.6 弹簧和阻尼力元的可视化

至此，从力学的角度我们已经完成了模型的建模工作：刚体、铰和力元。然而，现在的模型看起来还不够完美，因为弹簧和阻尼力元并没有显示，如图 2.13（左）所示。为了实现弹簧和阻尼力元的可视化，我们需要创建两个 **Bipolar** 力元，并设置数值为 0。这里的两个 **Bipolar** 力元仅用于显示弹簧和阻尼，并不影响计算结果，如图 2.13（右）所示。

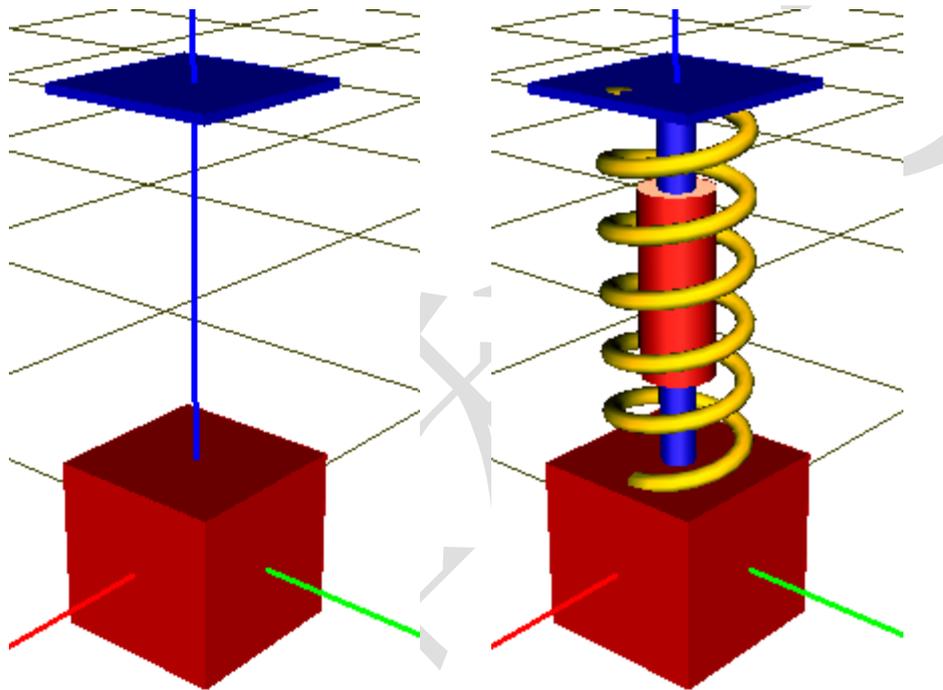


图 2.13 力元的可视化

备注：我们其实有多种方式可以定义本例中的弹簧和阻尼力元。这里采用的是 **Joint forces**，但这并不是唯一的方法。我们也可以直接用 **Bipolar forces**，同时进行可视化定义，而不需要再额外定义虚拟力元。只是这种方法可能存在的问题，对于理想情况，当刚体 **Brick** 的运动幅度很大时，模型中弹簧和阻尼力元的长度可能变为 0。这会导致 **Bipolar** 力元退化为 0（力元两端的连接点重合），程序无法找到它的方向（矢量不存在）。而 **Joint forces** 就不会存在这个问题，因为其方向始终沿着铰的方向。

1. 先选中左侧模型树的 **Bipolar forces**。
2. 然后在右侧交互界面添加两个 **Bipolar** 力元, 并按图 2.14 所示分别设置。

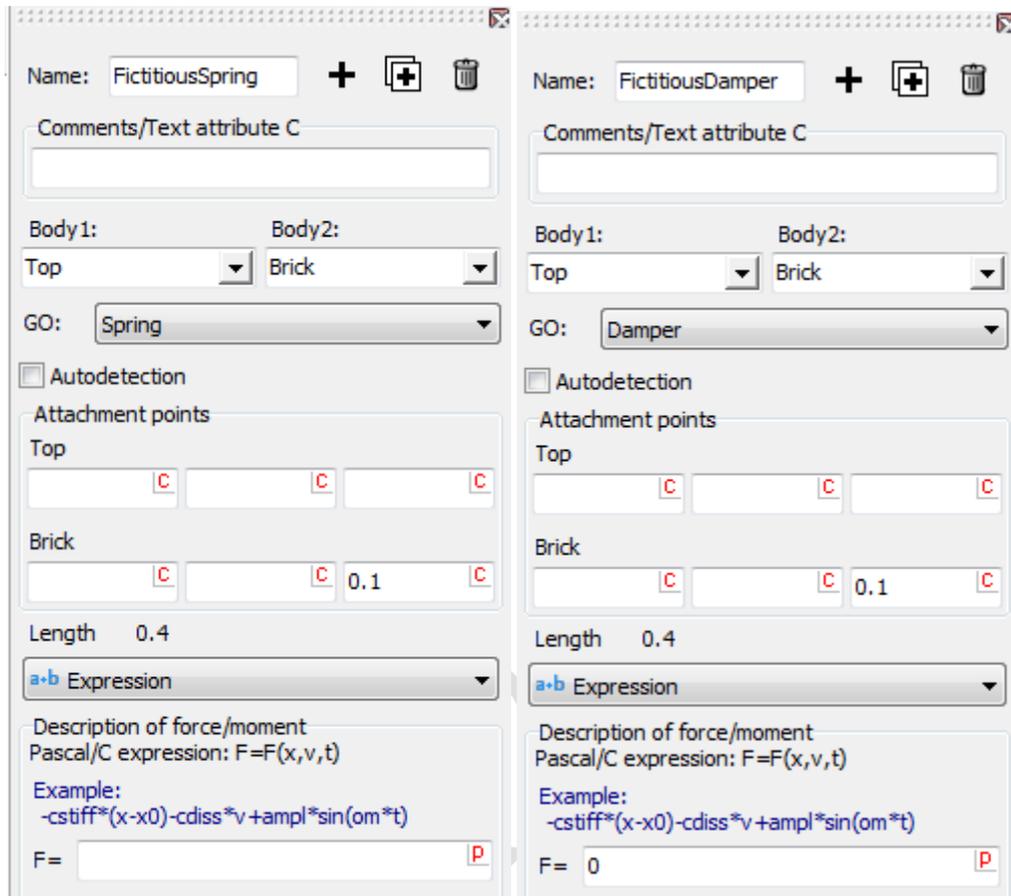


图 2.14 虚拟 Bipolar 力元

2.3.7 附加参数

UM 里的参数符号可以用来定义复杂的表达式。这里我们将添加两个新的符号来表示系统固有频率的精确解析值和临界阻尼系数。由于这个模型非常简单，所有才容易直接获得其解析解。

单自由度系统的固有频率可以由以下公式获得：

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

其中， k 是固有频率，单位为 rad/s；

c 是刚度系数，单位为 N/m；

m 是刚体质量，单位为 kg。

临界阻尼可表示为：

$$\mu^* = 2\sqrt{cm}$$

其中， μ^* 为临界阻尼系数，单位为 Ns/m。

现在我们来添加新的参数符号。

1. 点击左下方参数表的按钮  或在参数表区域点右键选择菜单 New identifier，如图所示。

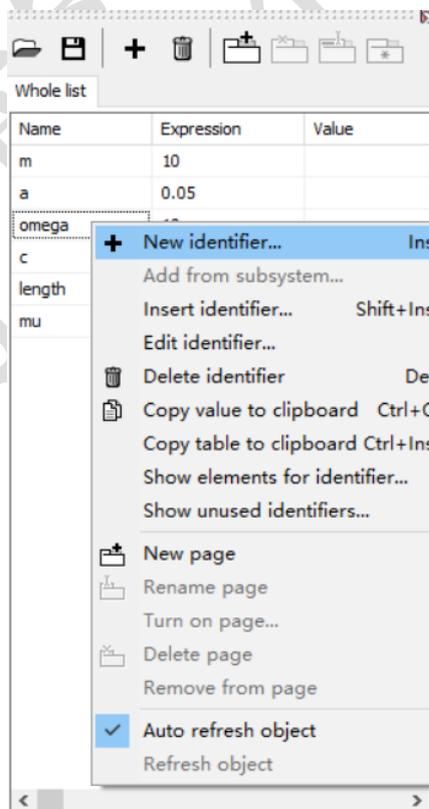


图 2.15 参数符号列表

2. 在弹出窗口定义参数符号 k （固有频率）及表达式 $\text{sqrt}(c/m)$ ，如图 2.16

所示。

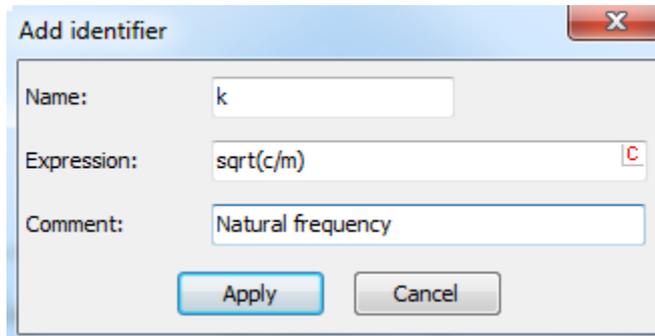


图 2.16 参数符号 k

3. 以相同的方法再添加一个参数符号 **mu_star** (临界阻尼系数), 定义表达式 $2*\sqrt{c*m}$, 如图 2.17 所示。

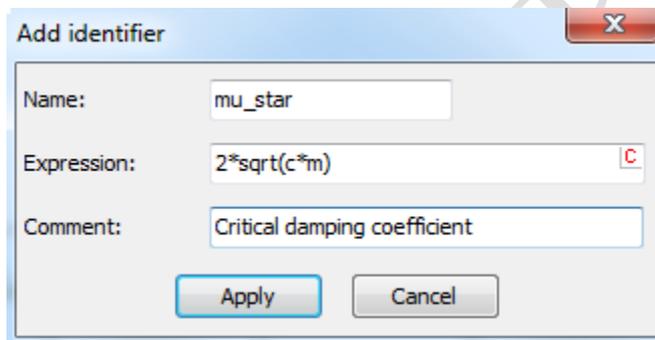


图 2.17 参数符号 mu_star

2.3.8 准备仿真

1. 选择菜单 **File | Save as...** 保存模型（请读者自定义模型路径），命名为 **Oscillator**。
2. 选择菜单 **Object | Simulation** 或使用快捷键 **Ctrl+M** 运行 **UM Simulation** 仿真程序并自动加载当前模型。



2.4 仿真

让我们来做一些特殊工况的振动仿真：有阻尼的自由振动、无阻尼的自由振动和无阻尼的受迫振动。

2.4.1 自由振动

有阻尼的自由振动

1. 选择菜单 **Tools | Animation window**，打开一个新的动画窗口（这一步可以不用做，因为 UM Simulation 加载模型时已经自动打开了以动画窗口）。
2. 选择菜单 **Tools | Graphic window**，打开一个新的绘图窗口。
3. 选择菜单 **Tools | Wizard of variables**，打开变量向导。
4. 在变量向导的 **Linear variables** 页面，左侧选中 **Brick** 刚体，右侧设置 **Type** 为 **Coordinate**（缺省就是），选择 **Z** 向分量（**Component**），点击按钮  创建一个变量，并将其拖入绘图窗口，然后关闭变量向导。
5. 选择菜单 **Analysis | Simulation**，弹出仿真控制界面 **Object simulation inspector**。

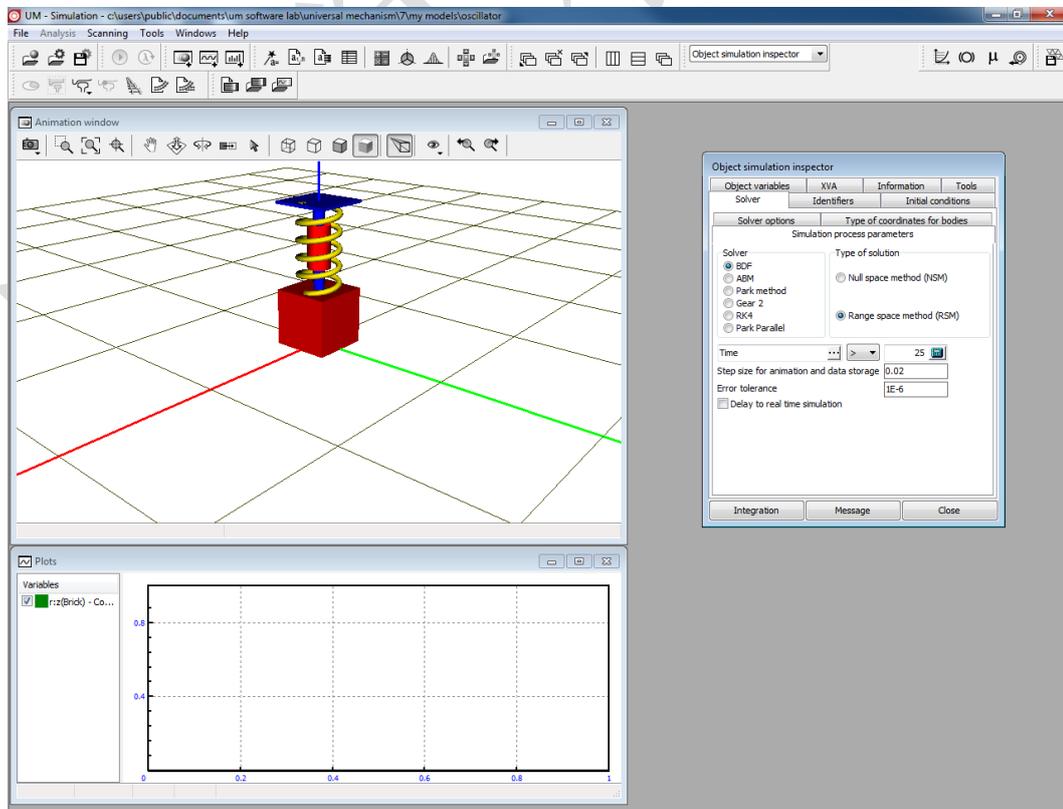


图 2.18 仿真程序界面

6. 仿真程序界面的几个窗口可随意调整大小和位置，如图 2.18 所示。
7. 点击仿真控制界面 **Object simulation inspector** 的 **Identifier**。
8. 设置参数 **a** 为 **0**，并回车，如图 2.19 所示。这表示刚体 **Top** 的振幅为 **0**，不发生运动。

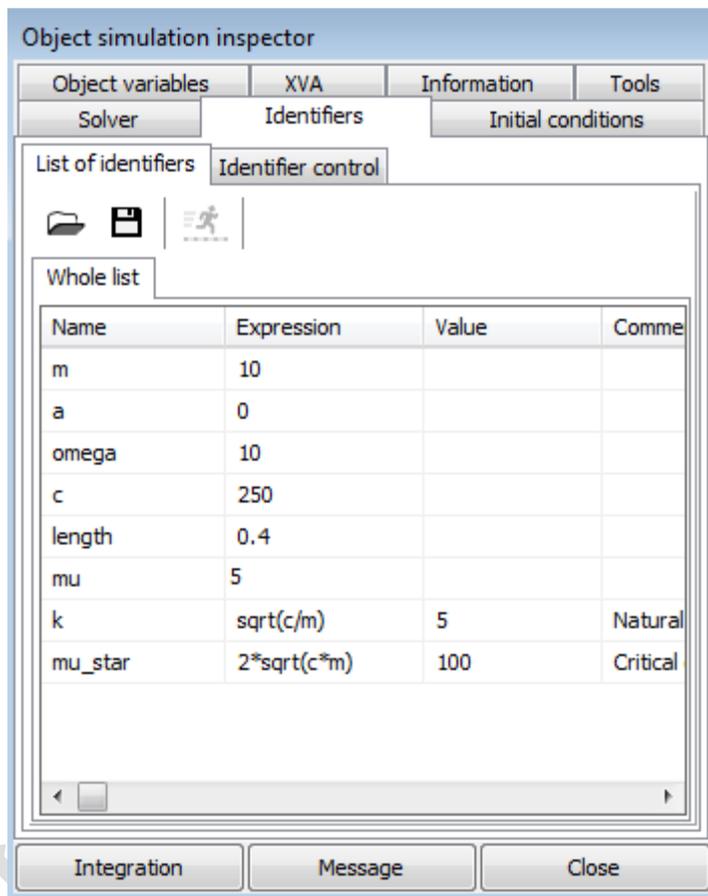


图 2.19 仿真参数

9. 点击仿真控制界面 **Object simulation inspector** 的 **Initial conditions**，定义初始位移值为 **0.1** (m)，如图 2.20 所示。这表示我们将刚体 **Brick** 初始偏移一定距离，使之远离平衡位置，这样才能获得较大幅度的振动。

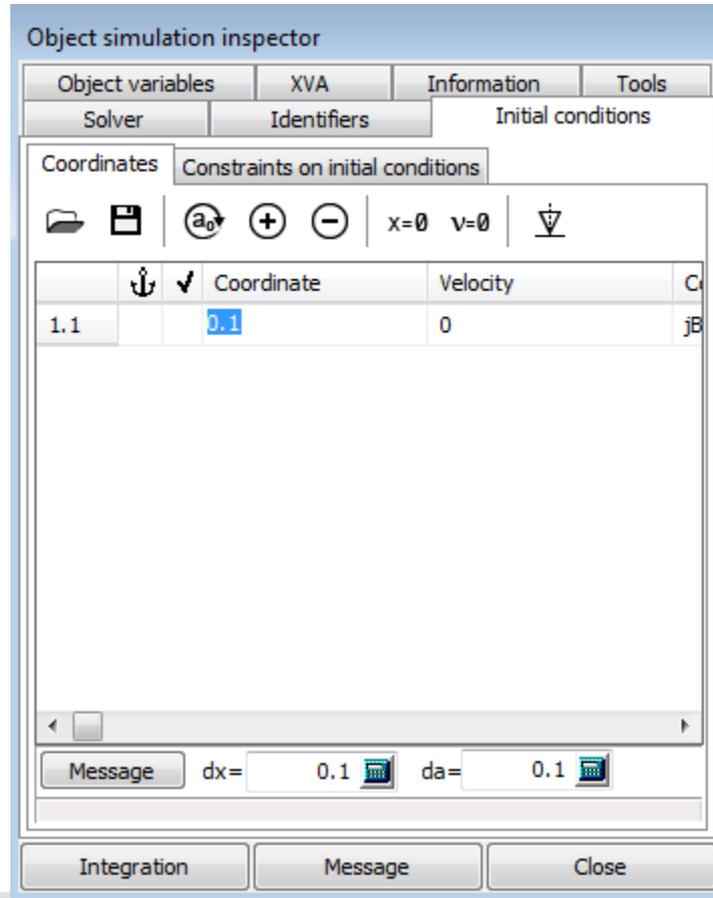


图 2.20 设置初始条件

10. 点击仿真控制界面 **Object simulation inspector** 的 **Solver**，设置仿真时间 (**Simulation time**) 为 **25** 秒。
11. 点击 **Interaction** 按钮开始仿真计算。
- 数值仿真将完成 25 秒的计算工况，可以在动画窗口观察刚体 **Brick** 的运动情况，在绘图窗口观察刚体 **Brick** 竖向位移的时程曲线。

12. 在绘图窗口点右键，选择菜单 **Show all**，可以显示整个曲线，如所示；也可以将光标指向绘图窗口顶部，此时隐藏的工具栏会自动显示，单击其中的  按钮。

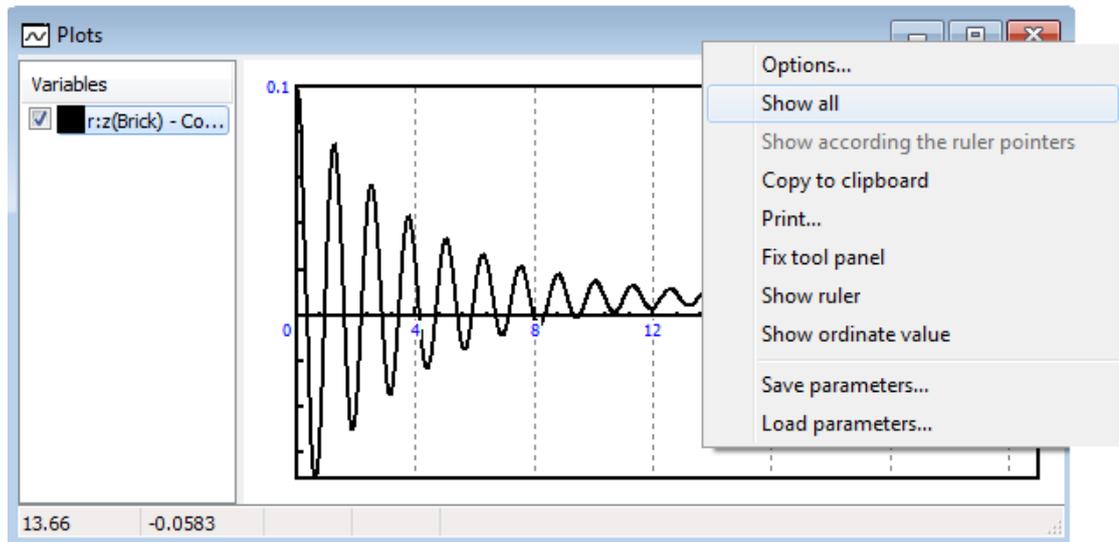


图 2.21 绘图窗口的结果

无阻尼的自由振动

现在我们取消阻尼（把阻尼系数设为 0），来对比无阻尼和有阻尼的计算结果。

1. 选中绘图窗口的变量 **r:z(Brick)**，点右键，然后选择菜单 **Copy as static variables**。这样就把计算的结果复制了一次，并保留在绘图窗口。
2. 点击 **Pause** 界面的 **Interrupt** 按钮，回到仿真控制界面。

备注：我们从变量向导创建的并拖入绘图窗口的变量 **r:z(Brick)** 是动态变量，它会在每次仿真时重新计算。为了对比不同参数配置工况的仿真结果，我们需要将动态变量进行复制操作，转换为静态变量，静态变量始终保持不变。

3. 选择仿真控制界面的 **Identifier**。
4. 设置参数 **mu** 为 **0**，并回车，这样就取消了阻尼。
5. 点击 **Integration** 按钮开始仿真。

大约经过数秒即完成计算。读者可以对比两次仿真的结果，如图 2.22 所示。

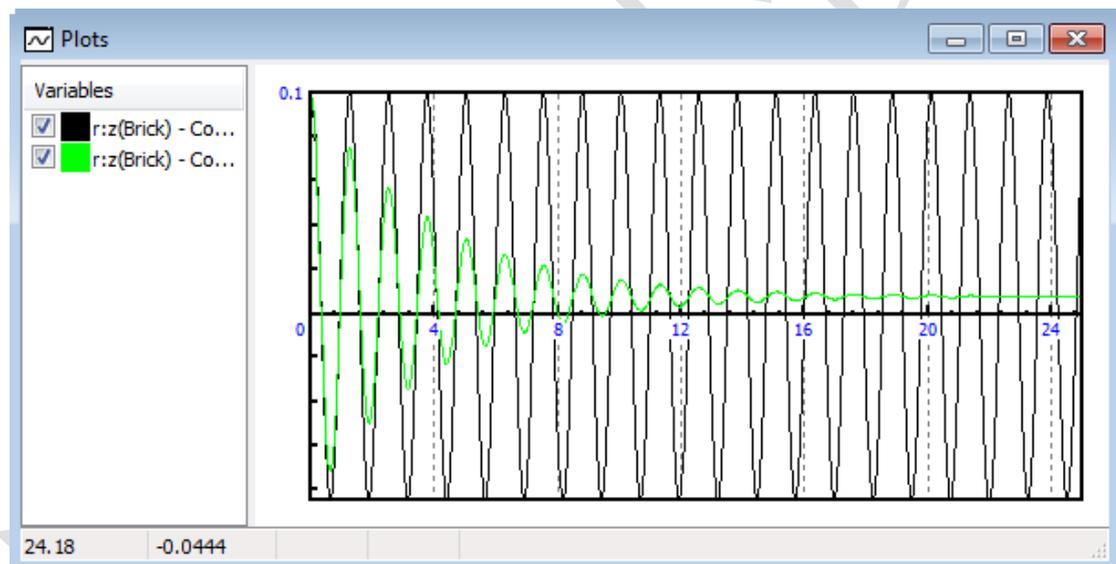


图 2.22 两次仿真结果对比

临界阻尼的自由振动

根据解析式得到临界阻尼系数 $\mu = 100 \text{ Ns/m}$ ，让我们来模拟这个工况。

1. 选中绘图窗口的动态（第一个）变量 **r:z(Brick)**，点右键，然后选择菜单 **Copy as static variables**。这样就把这次计算的结果复制了一次，并保留在绘图窗口（现在共有两个静态变量）。
2. 点击 **Pause** 界面的 **Interrupt** 按钮，回到仿真控制界面。
3. 选择仿真控制界面的 **Identifier**，设置参数 **mu** 为 **100**。
4. 点击 **Integration** 按钮开始仿真。

由图 2.23 可见，刚体 Brick 的运动不再呈周期性。

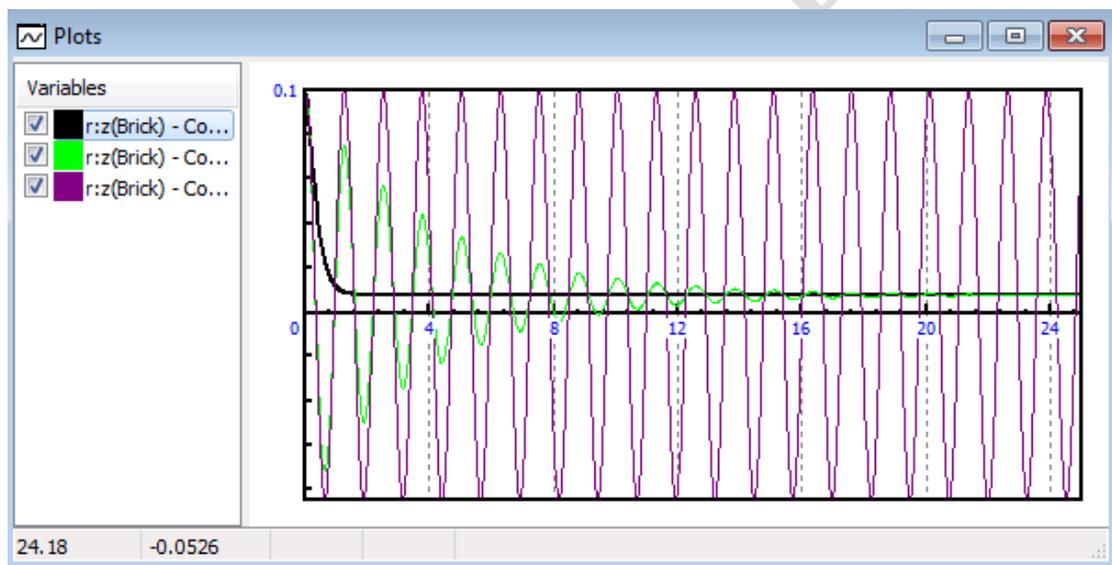


图 2.23 三次仿真结果对比

5. 读者可以自行重复以上步骤，尝试更改不同的阻尼系数值，进行仿真，对比分析结果（别忘了复制计算结果为静态变量）。
6. 最后，请将阻尼系数 **mu** 重置为 **100** (Ns/m)。

2.4.2 统计分析

现在我们来使用其它工具进行结果分析。

1. 选择菜单 **Tools | Statistics**，打开一个新的统计窗口。
2. 将绘图窗口中**无阻尼自由振动**对应的**静态变量**拖入统计窗口。
3. 点击统计窗口的功率谱密度 **Power spectral density**。

从功率谱密度的波形可以看出，这个振动过程仅有一个频率，即为系统固有频率，其精确解为 **5 rad/s**。下面我们来分析数值解，从图 2.24 可以看出峰值对应的频率大约为 **0.78Hz**，转换为圆频率： $0.78 * 2\pi = 4.9 \text{ rad/s}$ ，与解析解非常接近。

备注：为了读取更加精确的值，读者可以通过鼠标操作调整窗口显示比例，将曲线局部放大。

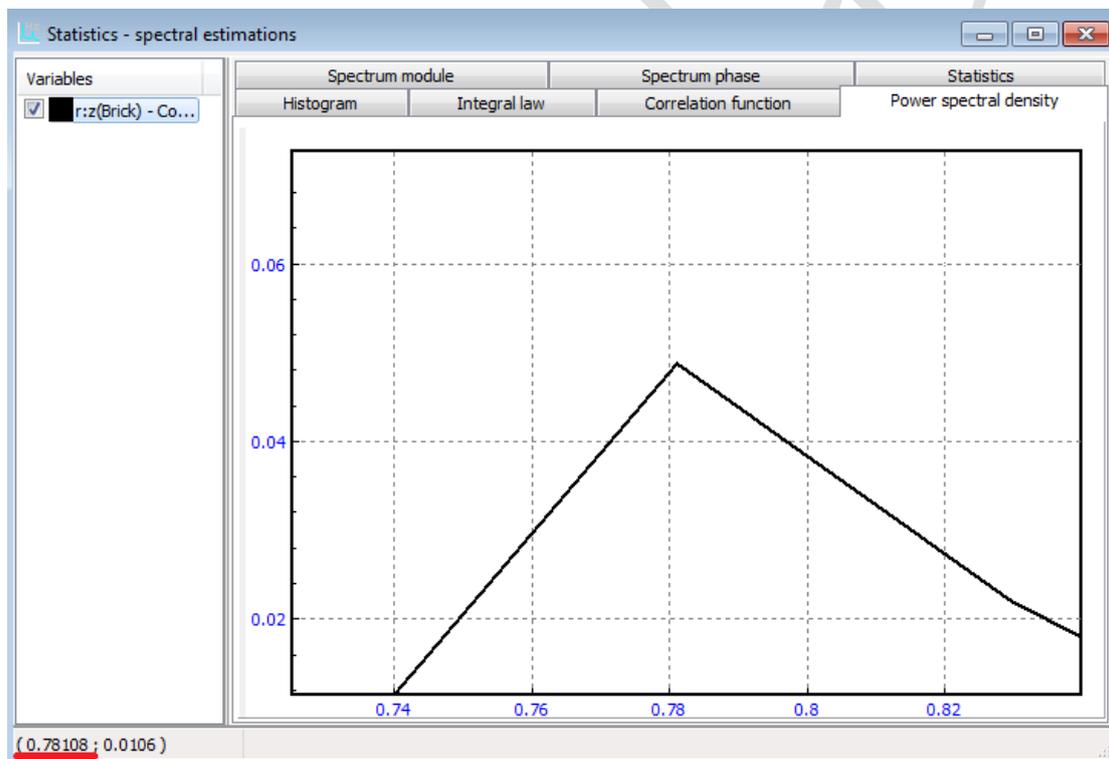


图 2.24 无阻尼自由振动的功率谱密度

2.4.3 静态和线性分析

下面我们来学习静态和线性分析（**Static and linear analysis**）工具的使用。使用这个工具，我们可以获得系统的平衡位置、固有频率和振型，以及阻尼比。

首先，我们需要依次关闭 **Pause** 窗口和仿真控制界面。

1. 点击 **Pause** 界面的 **Interrupt** 按钮，回到仿真控制界面。
2. 点击仿真控制界面的 **Close** 按钮。

打开线性分析窗口

3. 选择菜单 **Analysis | Static and linear analysis**，弹出静态和线性分析窗口。

平衡位置

4. 先点击 **Equilibrium**，再点击按钮  进行平衡位置计算。最后弹出消息“**Equilibrium position is successfully computed!**”此时，动画窗口显示的状态就是平衡状态。

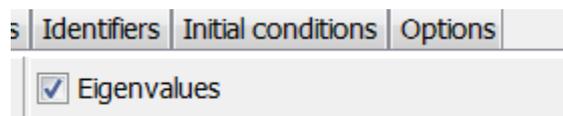
备注：计算完成后平衡位置对应的坐标可以保存为文件。先点击 **Initial conditions**，再点击  按钮即可保存到本地。在后续仿真时，如果需要，可以将文件读入仿真控制界面，作为初始条件。

固有频率和振型

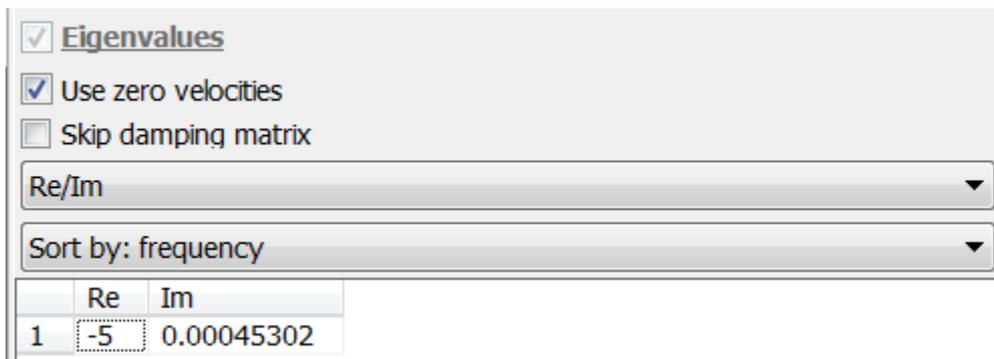
5. 先点击 **Frequencies/Eigenvalues**，再点击按钮  进行固有频率计算。计算得到的固有频率列表在窗口左边显示。可以看到，系统仅有一个频率，为 **0.795775Hz**，这个值与圆频率 **5rad/s** 非常接近。
6. 点击按钮 ，可以观察振型。读者可以自行调整幅值（**Amplitude**）和速率（**Rate**）。点击按钮  或按下 **Esc** 键可以暂停振型动画。

平衡稳定性

现在我们来计算线性化系统的根（特征值），通过它可以了解模型的稳定性。

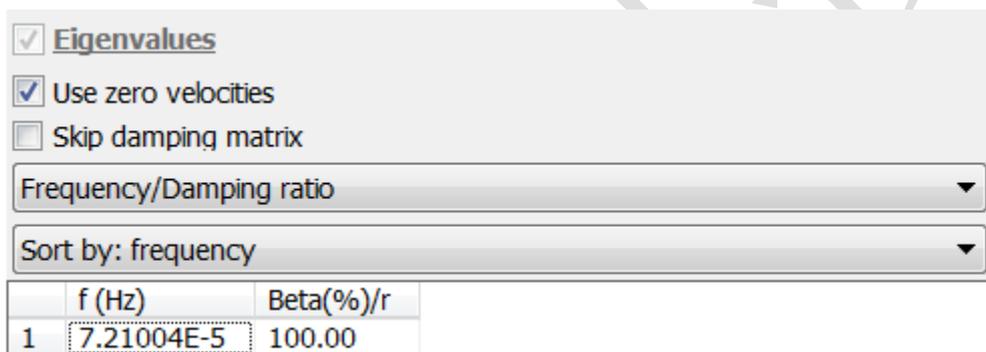


7. 先勾选 **Eigenvalues** 选项，再点击  进行特征值计算。



8. 计算得到的系统特征值列表显示在右侧。选择 **Re/Im**（实部/虚部）显示模式，对于每一组共轭根，这里只显示其中虚部为正的数。可以看出，特征值的实部为负，因此平衡位置是渐进稳定的。

阻尼比



9. 选择 **Frequency/Damping ratio**（频率/阻尼比）显示模式。可以看到，阻尼比 **Beta** 为 **100%**，正好对应临界阻尼。理论上此时的频率应该为 0Hz，但由于数值计算误差，这里显示的是一个很小的数。

备注：从计算得到的阻尼比数值可以看出是否每个振型对应的阻尼系数都合适，阻尼器的位置和参数是否需要修改。

10. 读者可以在 **Identifier** 页面自行修改参数 **mu** 的数值，重复以上步骤，观察系统频率和阻尼比的变化。
11. 关闭静态和线性分析窗口 **Static and linear analysis**。

2.4.4 受迫振动

下面我们来考察无阻尼的受迫振动。

1. 删除绘图窗口中的所有静态变量，只保留第一个动态变量。
2. 选择菜单 **Analysis | Simulation**，打开仿真控制界面。
3. 点击 **Identifier**，设置参数值：**a = 0.05**，**omega = 8**，**mu=0**。
4. 点击 **Integration** 开始仿真。可以看到，刚体 **Top** 也在运动，刚体 **Brick** 垂向位移的时程曲线如图 2.25 所示。

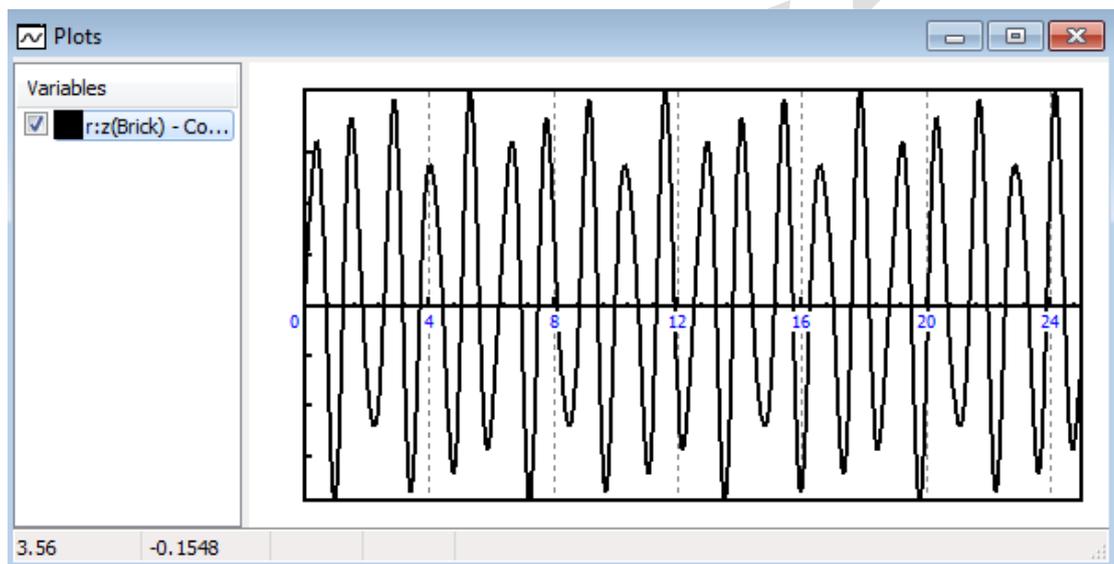


图 2.25 受迫振动 ($\omega = 8\text{rad/s}$)

共振

最后,我们来模拟一个共振工况:当外部激励的频率与系统固有频率相等时。

1. 点击 **Pause** 窗口的 **Interrupt** 按钮。
2. 在仿真控制界面,设置参数 **omega** 为 **5**。
3. 点击 **Integration** 开始仿真。正如我们期望的,当外部激励的频率与系统固有频率相等时,系统明显发生了共振情况,刚体 **Brick** 的振幅越来越大,如图 2.26 所示。

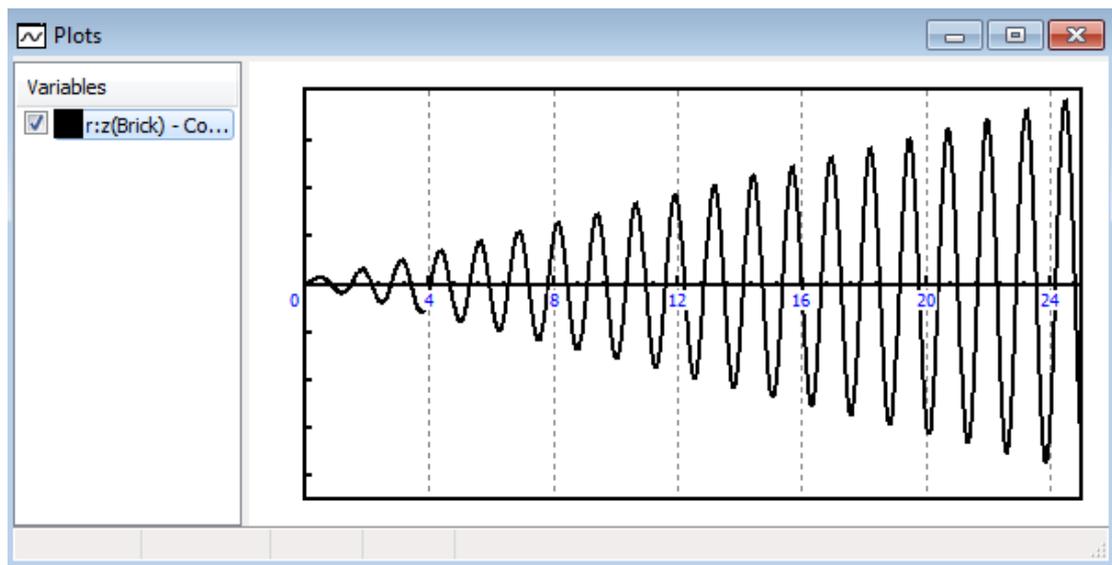


图 2.26 受迫振动: 共振工况

3. 悬臂梁

3.1 课程内容

本课程演示如何使用多刚体方法建立柔性的悬臂梁模型，使用线性分析工具求解其平衡位置、固有频率和振型，并仿真欧拉临界力和大变形两个特殊工况。

3.2 模型简介

我们将用多刚体的方法来建立一个悬臂梁模型[1]。这根梁由多段刚性杆件组成，相邻刚体之间用转动铰连接。其中，两端的杆长度为 $l/2$ ，中间杆长度为 l ， $l=L/(N-1)$ ， L 为梁的总长， N 为刚性杆的数目。左端的刚性杆与墙面固结，相邻两个杆定义转动自由度，并设置一个弹簧-阻尼力元，其刚度系数为 c ，阻尼系数为 α ，如图 3.1 所示。

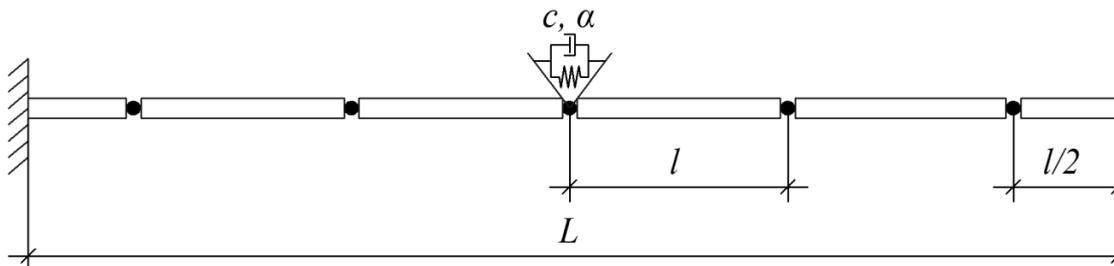


图 3.1 多段刚性杆组成的弹性梁模型

在本例中，我们用钢的材料参数来定义这根梁（ $E = 2.1 \times 10^{11} Pa$ ， $\rho = 7850 kg/m^3$ ），其横截面为圆形，总长度 $L = 3 m$ 。悬臂梁总共由 11 段刚性杆组成，读者可以在本地路径 `{UM Data}\SAMPLES\TUTORIAL\cantilever_beam` 找到这个模型³。

³ 读者也可以从官方网站下载模型 www.universalmechanism.com/download/80/cantilever_beam.zip

3.3 建模

运行 UM Input 程序，新建一个模型，在参数表添加参数符号：*BeamLength*, *YoungsModulus*, *l*, *d*, *J*, *cax*, *dax*，如表 3.1 所示。

表 3.1 梁模型参数

参数符号	表达式	备注
BeamLength	3	梁的总长
YoungsModulus	2.1E+11	杨氏模量
l	BeamLength/10	中间杆长
d	2*1/75	横截面直径
J	$\pi*d*d*d*d/64$	圆形截面惯性矩
cax	YoungsModulus*J/l	刚度系数
dax	5	阻尼系数

3.3.1 创建几何图形

模型需要 4 个几何图形：一个用于墙体，三个用于区分不同的刚性杆。

Support

1. 添加一个几何图形，选择 **Box** 类型。
2. 重命名为 **Support**，设置参数如下：
 - A = 0.5;**
 - B = 0.05;**
 - C = 0.5。**
3. 在 **GE Position** 页面设置移动距离：**Translation | Y** 为-0.025, **Translation | Z** 为-0.25。
4. 在 **Colors** 页面设置颜色为棕色。

Rods

1. 添加一个几何图形，选择 **Cone** 类型。
2. 重命名为 **Rod1**，设置参数如下：
 - R2= d/2;**
 - R1 = d/2;**
 - h = l/2。**
3. 在 **GE Position** 页面设置移动距离：**Translation | Y** 为-l/4，转动角度：**Rotational | X** 为-90，如图 3.2 所示。

4. 在 **Material** 页面设置材料密度 **Density** 为 **7850**。
5. 在 **Colors** 页面设置颜色为**蓝色**。
6. 再添加一个几何图形, 选择 **Cone** 类型。重命名为 **Rod2**, 设置参数如下:

$$\begin{aligned} R2 &= d/2; \\ R1 &= d/2; \\ h &= l. \end{aligned}$$
7. 在 **GE Position** 页面设置移动距离: **Translation | Y** 为**-l/2**, 转动角度: **Rotational | X** 为**-90**, 如所示。
8. 在 **Material** 页面设置材料密度 **Density** 为 **7850**。
9. 在 **Colors** 页面设置颜色为**黄色**。
10. 将几何图形 **Rod2** 复制一次, 重命名为 **Rod3**, 修改颜色为**蓝色**。

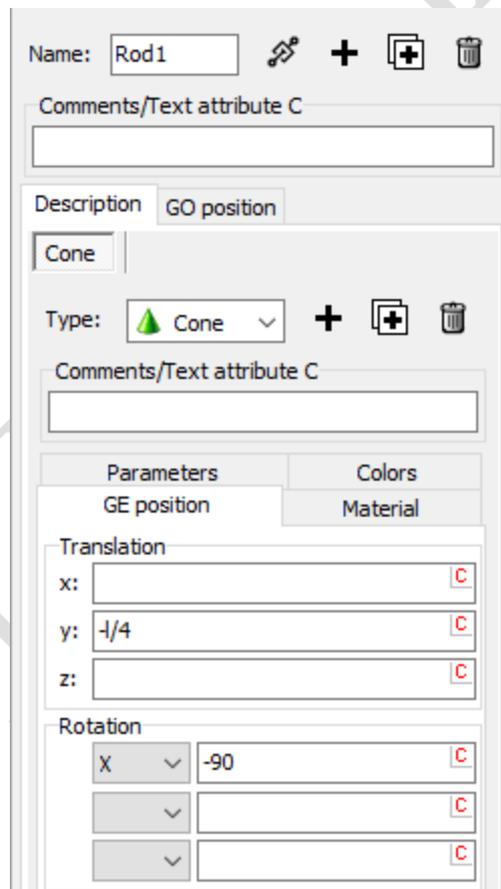


图 3.2 设置 Rod1 的位置和方向

3.3.2 创建刚体

Support

1. 添加一个刚体。
2. 重命名为 **Support**。
3. 从 **Image** 下拉菜单选择 **Support** 几何图形赋给刚体。
4. 勾选 **Compute automatically** 选项，程序会根据几何图形和材料密度自动计算出刚体的质量和惯量参数，如图 3.3 所示。

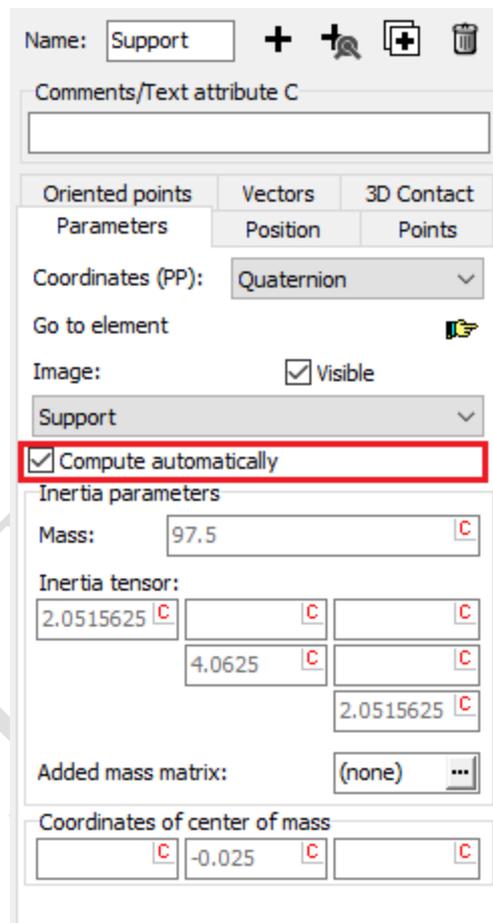


图 3.3 自动计算质量和惯量

Rods

1. 添加 **11** 个刚体。
2. 分别命名为 **Body1**, **Body2**, ..., **Body11**。
3. 其中 **Body1** 和 **Body11** 选择几何图形 **Rod1**, **Body2**、**Body4**、**Body6**、**Body8** 和 **Body10** 选择几何图形 **Rod2**, 其余刚体选择几何图形 **Rod3**。
4. 对每一个刚体, 都要勾选 **Compute automatically** 选项, 如图 3.3 所示。

3.3.3 创建铰

刚体 Support 的铰

Support 是一个固定的物体，没有自由度。我们可以建一个铰，使之与大地（Base0）固结在一起。

1. 先在左侧模型树选中 **Bodies | Support**。
2. 然后点击右侧交互界面手形按钮，选择 **Create joint**。
3. 再在列表中选择 **6 d.o.f.**，这样就创建了一个六自由度铰。
4. 铰连接的第一物体为 **Base0**，第二物体为 **Support**。缺省状态，六个方向（三个平动和三个转动）的运动都是自由的。
5. 在 **Coordinates** 页面取消所有自由度，让 **Support** 与大地固结，如图 3.4 所示。

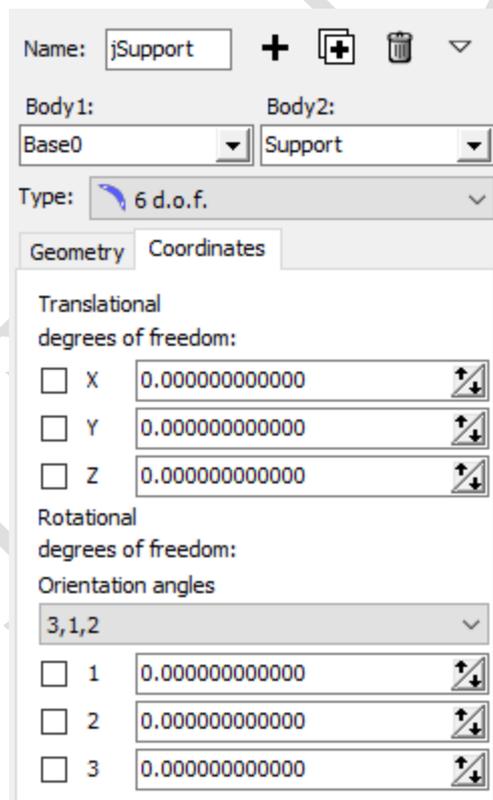


图 3.4 Support 的铰

第一个 Rod 与刚体 Support 的铰

我们先来创建梁左端的铰，需要保证其边界条件为固支。

1. 先在左侧模型树选中 **Bodies | Body1**。
2. 然后点击右侧交互界面手形按钮，创建一个六自由度铰。
3. 重命名为 **jSupportBody1**。
4. 选择刚体 **Support** 作为六自由度铰连接的第一物体。
5. 在 **Geometry** 页面设置 **Body2** 的连接点 **Y** 坐标为 $-l/4$ 。
6. 在 **Coordinates** 页面取消所有自由度，使得 **Rod1** 与 **Support** 刚性连接。

Rod 之间的铰

下面定义刚性杆之间具有弹簧阻尼力元的转动铰。

1. 先在左侧模型树选中 **Bodies | Body2**。
2. 然后点击右侧交互界面手形按钮，创建一个转动铰。
3. 重命名为 **jBody1Body2**。
4. 选择刚体 **Body1** 为转动铰连接的第一物体。
5. 分别定义 **Body1** 和 **Body2** 的连接点坐标（各自局部坐标系），如图 3.5 所示。

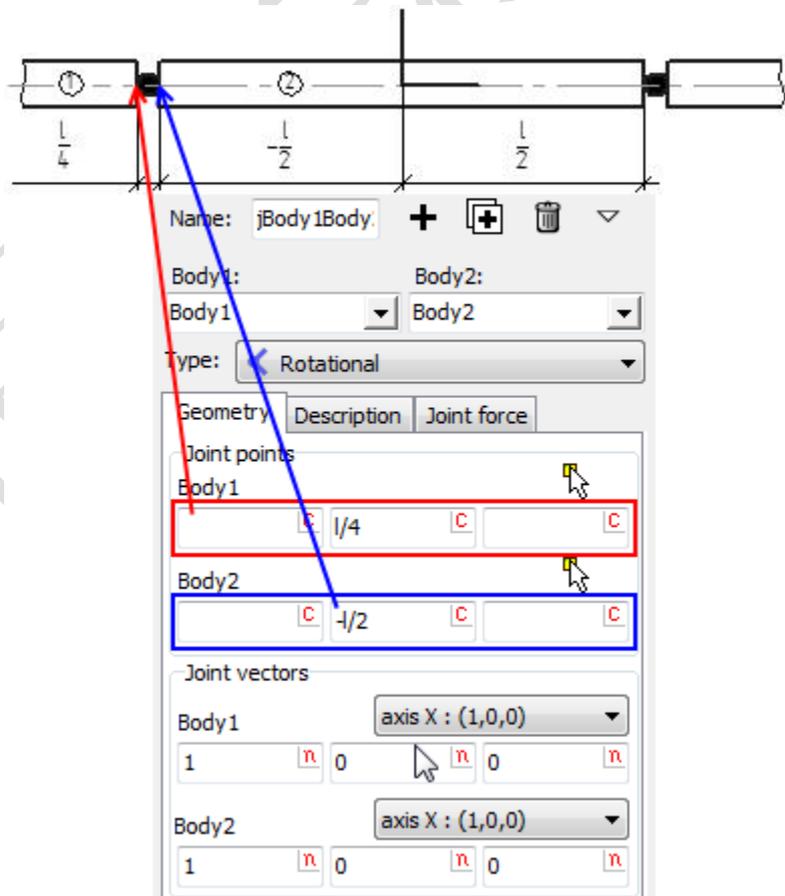


图 3.5 设置转动铰

6. 在 **Joint force** 页面选择 **Linear** 类型力元，分别设置刚度系数 **cax** 和阻尼系数 **dax**，如图 3.6 所示。

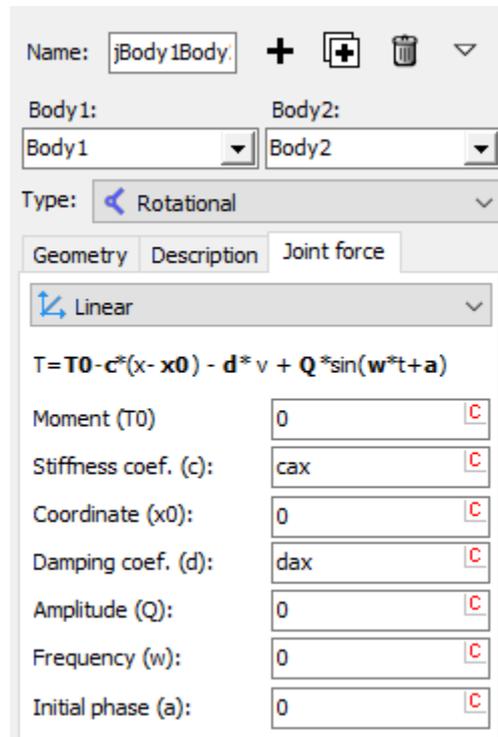


图 3.6 设置弹簧阻尼力元

7. 以同样的方法，分别创建从 **Body3** 到 **Body11** 相邻两个刚体之间的铰及力元（注意连接点坐标）。

3.3.4 准备仿真

在进入仿真之前，我们来检查一下模型有无逻辑错误。在模型树里选中 **Summary**（快捷键 **Ctrl+Alt+P**）。如果交互界面显示“**Errors not found**”，说明没有逻辑上的问题，如图 3.7 所示。如果模型存在逻辑错误，则是不能进行仿真的，点击交互界面显示的错误信息，可以自动跳转到存在错误的元素页面。

保存模型，命名为 **Cantilever_beam**。选择菜单 **Object | Simulation**（快捷键 **Ctrl+M**），打开 **UM Simulation** 仿真程序，并自动加载当前模型。

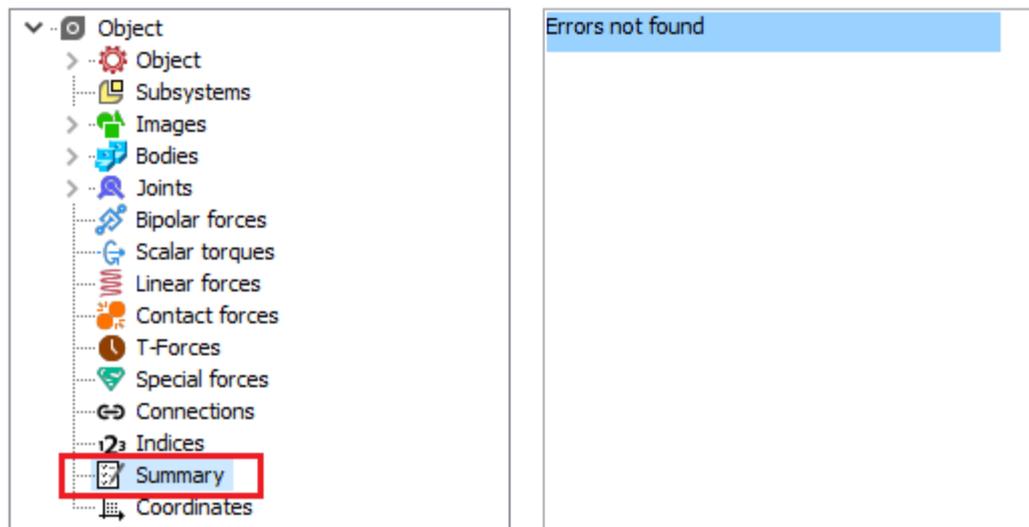


图 3.7 检查模型有无逻辑错误

3.4 仿真

我们将进行如下仿真：计算平衡位置、固有频率、模态振型和欧拉临界力。

3.4.1 计算平衡位置

一般来说，在 UM 里创建的模型，初始状态并不在平衡位置。为了避免在仿真开始的一段时间内出现明显的瞬态波动，有必要先计算出平衡位置并从平衡状态开始仿真。通常这是进行仿真的第一步。计算平衡位置有如下两种方法：

- 解析法：直接求解平衡方程；
- 数值法：对运动方程进行时域积分，逐步逼近平衡位置。

第一种方法通常比较快速且能获得更精确的解，不仅能获得系统的平衡位置而且能找到其中不稳定的平衡位置。第二种方法，只能逐步逼近平衡位置。下面，我们来演示两种方法。

3.4.1.1 解析法直接求解平衡方程

1. 点击  按钮或选择菜单 **Analysis | Static and linear analysis**，打开线性分析工具。
2. 点击 **Options | General option**，在 **Equilibrium computation type** 框设置 **Solving equations**，如图 3.8 所示。
3. 先点击 **Equilibrium**，再点击按钮  开始计算。计算完毕，动画窗口显示的即为平衡位置状态，如图 3.9 所示。

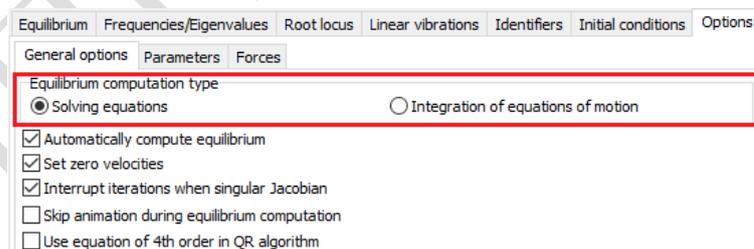


图 3.8 选择计算平衡未知的方法

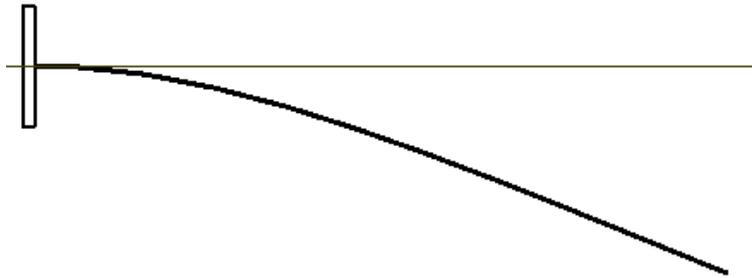


图 3.9 悬臂梁的平衡位置状态

3.4.1.2 运动方程数值积分求解

1. 先点击 **Initial conditions**，点击按钮 $x=0$ ，将所有坐标恢复为 0 。
2. 点击 **Options | General options**，在 **Equilibrium computation type** 框设置 **Integration of equation of motion**，如图 3.8 所示。
3. 先点击 **Equilibrium**，再点击按钮  开始计算。观察动画窗口运动过程。

采用运动方程积分法求解平衡位置时，一般用系统总动能作为达到平衡位置的判据。在一段时间内系统总动能呈下降趋势，并小于给定的数值时，认为系统就达到了平衡。

使用这种方法计算平衡位置时，程序会自动添加附加阻尼力以加快收敛过程。广义阻尼力与质量矩阵和速度列向量的积成正比。

$$Q_{diss} = -\alpha M(q)\dot{q} \quad (3.1)$$

阻尼系数 α 位于 **Options | Parameters** 页面的 **Parameter of additional damping** 框。分别设置不同的阻尼系数，如：**0.1**、**0.5** 和 **1**。在动画窗口观察系数变化对仿真的影响。显示了三个系数值对应的系统总动能时程曲线对比。

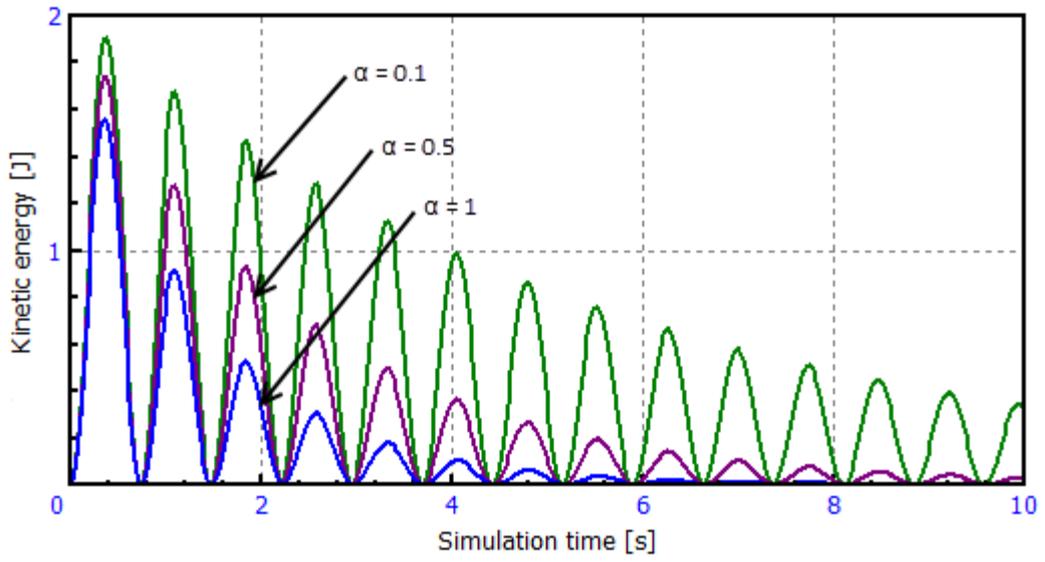


图 3.10 阻尼系数的影响

3.4.2 计算固有频率和振动模态

根据文献[2]，悬臂梁的固有频率可以由下面的公式计算得到：

$$f_k = \lambda_k^2 \sqrt{\frac{EJ}{m_0 L}} \quad (3.2)$$

其中， E 是弹性模量，单位为 Pa；

J 是横截面的惯性矩，单位为 m^4 ；

m_0 是单位长度的质量，单位为 kg/m；

L 是长度，单位为 m；

k 是频率序号；

λ 参数定义如下：

$$\lambda_1 = 1.875, \lambda_2 = 4.694, \lambda_k = \frac{2k-1}{2} \pi \quad (k > 2) \quad (3.3)$$

模态振型函数可表示为：

$$\omega_k(x) = K_2(\lambda_k)K_3\left(\frac{\lambda_k x}{L}\right) - K_1(\lambda_k)K_4\left(\frac{\lambda_k x}{L}\right) \quad (3.4)$$

其中， K_1 、 K_2 、 K_3 、 K_4 为 Krylov 函数，定义如下：

$$\begin{cases} K_1(x) = \frac{1}{2}(\cosh(x) + \cos(x)) \\ K_2(x) = \frac{1}{2}(\sinh(x) + \sin(x)) \\ K_3(x) = \frac{1}{2}(\cosh(x) - \cos(x)) \\ K_4(x) = \frac{1}{2}(\sinh(x) - \sin(x)) \end{cases} \quad (3.5)$$

现在我们来计算悬臂梁的固有频率和模态振型。首先，我们按如下操作取消重力，以免梁在重力作用下发生扭曲振动。

1. 关闭 **UM Simulation** 的悬臂梁模型，运行 **UM Input** 打开模型。
2. 先在左侧模型树选中 **Object**。
3. 然后在右侧交互界面 **Gravity force direction** 框 **ez** 一栏定义重力系数 **gravity_factor**，赋值为 **0**，如图 3.11 所示。
4. 保存模型，再用 **UM Simulation** 打开。

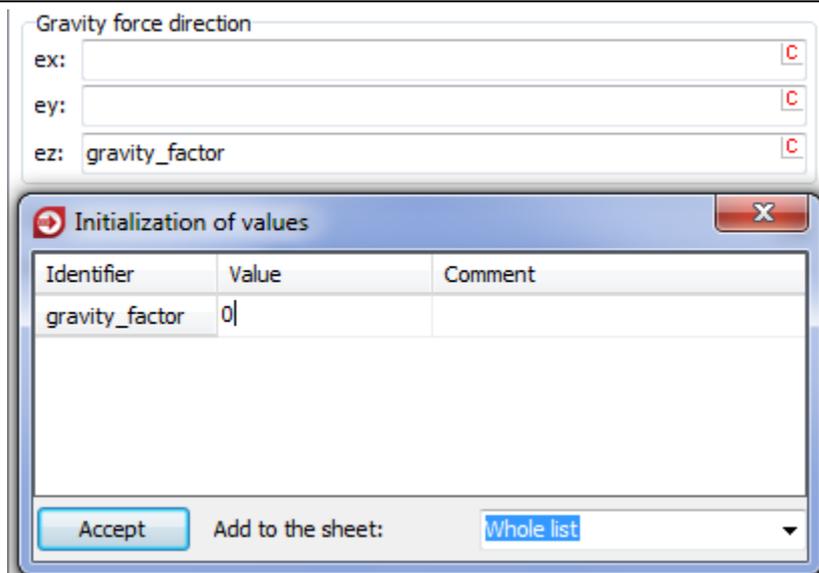


图 3.11 取消重力的方法

打开**静态和线性分析工具**，点击**Frequencies/Eigenvalues**，点击按钮开始计算。计算完毕，悬臂梁的各阶固有频率显示在左侧列表，如图 3.12 所示。点击按钮或者双击某阶频率值即可观察振型动画，点击按钮或按 **Esc** 键可停止动画。

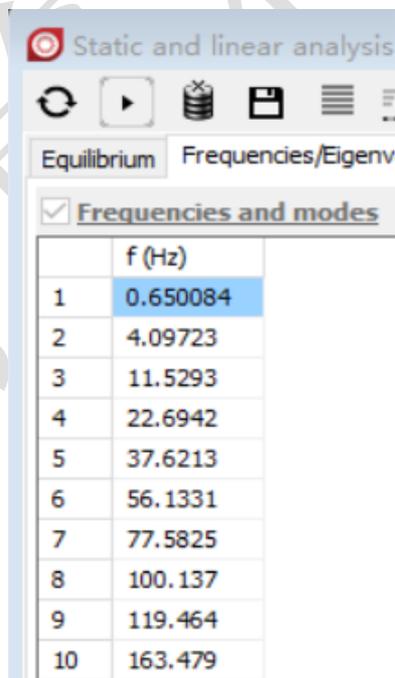


图 3.12 悬臂梁的固有频率

解析法和数值法计算结果对比见表 3.2。低阶模态振型如图 3.13 所示。

表 3.2 悬臂梁的自振频率对比

k	解析解 (Hz)	数值解 (Hz)	相对误差 (%)
1	0.64311	0.64543	-0.36
2	4.03059	4.06788	-0.93
3	11.2539	11.4467	-1.44
4	22.1165	22.5319	-1.88
5	36.5600	37.3530	-2.17

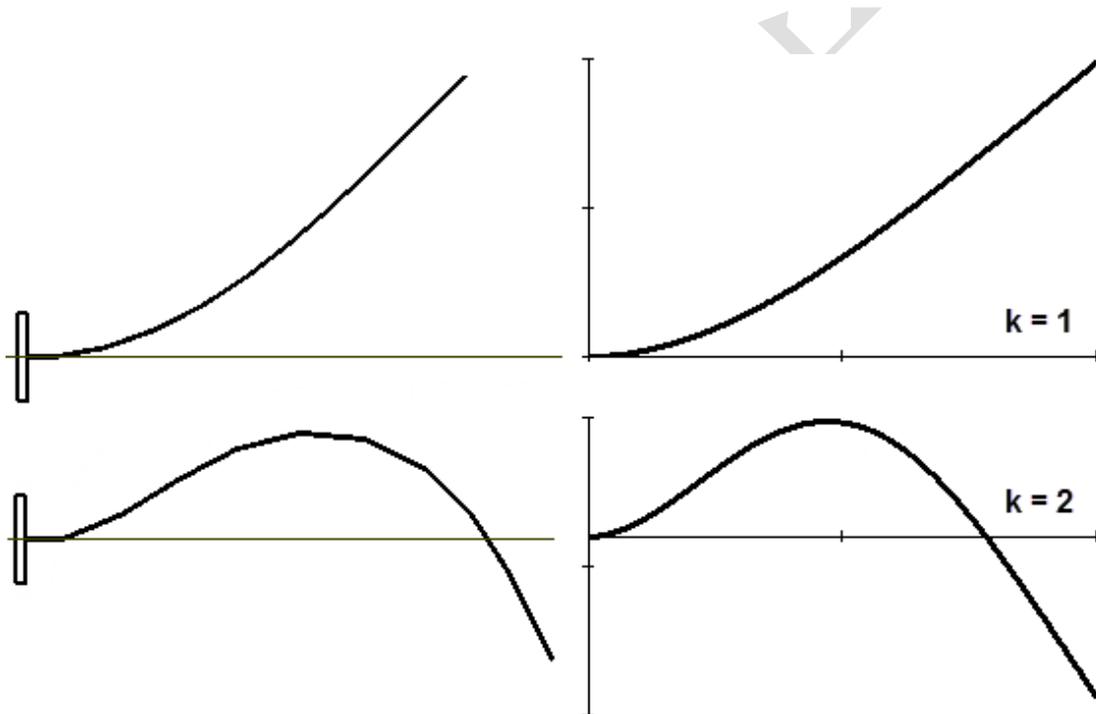


图 3.13 悬臂梁前两阶模态振型对比

3.4.3 欧拉临界力

作用在梁上的轴向力会影响其固有频率。当梁被拉伸时，固有频率增大；当梁被压缩时，固有频率减小。当力小于临界力时保持直线稳定状态。一旦超过临界力，将会发生横向变形（屈曲），从稳定状态变为不稳定状态。

根据文献[3]，梁的临界力（欧拉公式）表示为：

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu L)^2} \quad (3.6)$$

其中， E 是弹性模量，单位为 Pa；

J 是横截面的惯性矩，单位为 m^4 ；

L 是长度，单位为 m。

对比本例中的梁，其临界力为：

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 2.1 \times 10^{11} \cdot 2.01 \times 10^{-10}}{(2 \cdot 3)^2} = 11.58 \text{ N} \quad (3.7)$$

下面，我们给梁的轴向施加一个压力，研究第一阶频率随压力大小变化的规律。

1. 关闭 **UM Simulation** 的悬臂梁模型，运行 **UM Input** 打开模型。
2. 在左侧参数表添加一个新的参数符号 **Fy**，并赋初值 **0**。
3. 添加一个 **T-force**，如图 3.14 所示。

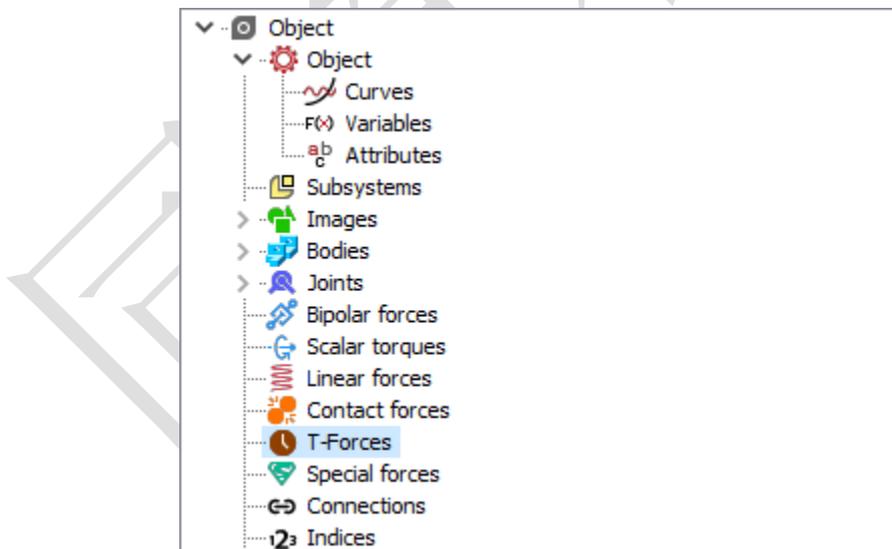


图 3.14 添加 T-force

4. 重命名为 **ForceY**。
5. 在 **T-forces** 交互界面选择 **Base0** 作为第一物体，选择 **Body11** 作为第二物体，参考系选择 **Base0**。力的作用点坐标为 $(0, l/4, 0)$ ，并在 **Force** 框设置横向力 **-Fy**，如图 3.15 所示。
6. 保存模型，再用 **UM Simulation** 打开。

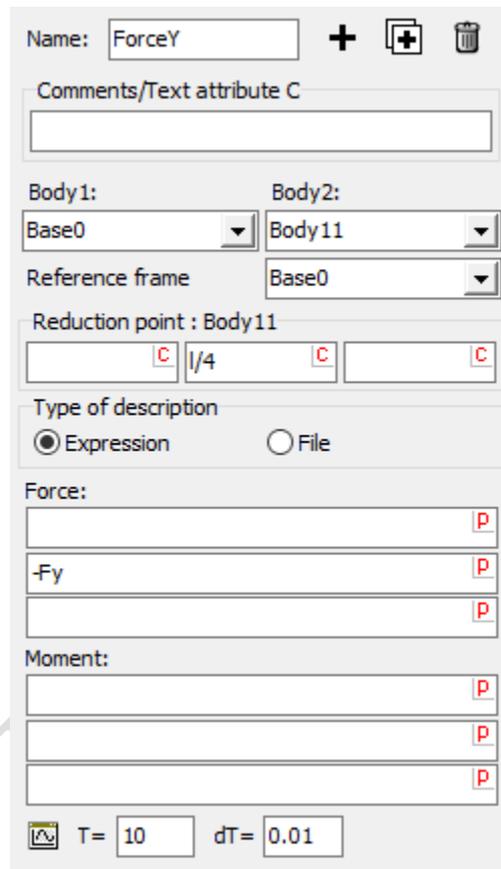


图 3.15 设置 T-Force

打开**静态和线性分析工具**。点击 **Root locus**，在 **Type of problem** 框选择 **Frequencies**，在 **Identifier** 一栏选择参数符号 **Fy**。在 **Limits** 上下栏分别输入 **0** 和 **12**（稍大于临界力），在 **Count** 一栏输入 **20**，这样程序就会将 **Fy** 的值从 **0** 到 **12** 等分为 **20** 份，依次进行 **20** 次计算。点击 **Options | General options**，在 **Equilibrium computation type** 框选择 **Solving equations** 方法计算平衡位置，如图 3.16 所示。点击按钮  开始计算。计算完毕，点击按钮  可以绘制第一阶频率随参数 **Fy** 变化的曲线，曲线与 **X** 轴的交点处对应着系统失稳临界状态，如图 3.17 所示。

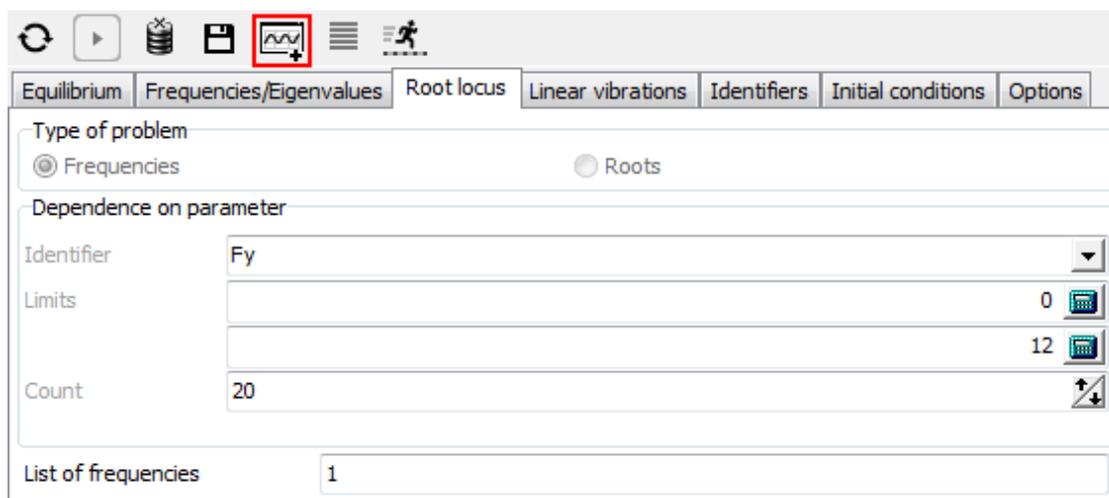


图 3.16 计算根轨迹

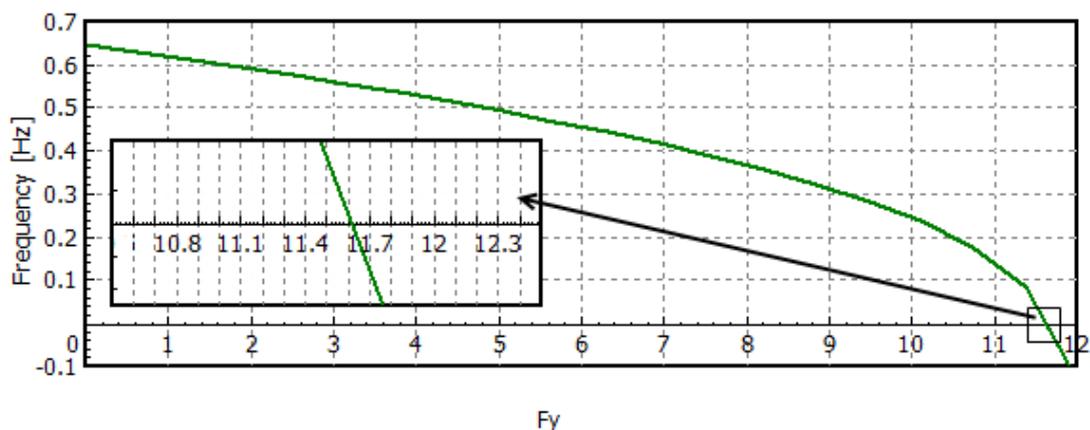


图 3.17 第一阶频率随压力变化的规律

3.4.4 大变形

我们现在来考察一个工况：在悬臂梁的自由端作用一垂向力，自由端梁截面将产生大的变形：垂向 w 和横向 u 。文献[4]给出了这个问题的解析解。由于求解过程比较复杂，这里就不再赘述。一些特殊工况的计算结果见表 3.3，其中 k 是力的系数， w/L 和 u/L 是无量纲的垂向变形和横向变形。

下面我们用 UM 计算的数值解与解析解做对比。首先，在悬臂梁的自由端添加一个力使之产生大幅运动。操作如下：

1. 关闭 **UM Simulation** 的悬臂梁模型，运行 **UM Input** 打开模型。
2. 在左侧参数表依次添加两个新的参数符号 k 和 Fz ，并设置 Fz 的表达式 $k * \text{YoungsModulus} * J / (\text{BeamLength} * \text{BeamLength})$ ，如图 3.18 所示。
3. 添加一个 **T-force**，命名为 **ForceZ**。
4. 在 **T-forces** 交互界面选择 **Base0** 作为第一物体，选择 **Body11** 作为第二物体，参考系选择 **Base0**。力的作用点坐标为 $(0, l/4, 0)$ ，并在 **Force** 框设置垂向力 Fz 。
5. 保存模型，再用 **UM Simulation** 打开。

表 3.3 集中力作用下悬臂梁自由端的变形

$k = PL^2/EJ$	w/L	u/L
0.25	0.083	0.004
0.50	0.162	0.016
0.75	0.235	0.034
1	0.302	0.056
2	0.494	0.160
3	0.603	0.255
4	0.670	0.329
5	0.714	0.388
6	0.744	0.434
7	0.767	0.472
8	0.785	0.504
9	0.799	0.531

Name	Expression	Value	Comment
BeamLength	3		Beam length
YoungsModulus	2.1000000E+11		Young's modulus
l	BeamLength/10	0.3	Length of rigid rod
d	2*/75	0.008	Cross-section diameter
J	pi*d*d*d*d/64	2.0106193E-10	Moment of inertia of cross-section
cax	YoungsModulus*J/l	140.74335	Stiffness coefficient
dax	5		Damping coefficient
gravity_factor	0		
Fy	0		
k	0		Load factor
Fz	k*YoungsModulus*J/(BeamLength*BeamLength)	0	

图 3.18 参数化的垂向力

现在我们来定义变量 w/L 和 u/L 。

1. 选择菜单 **Tools | Wizard of variables**，打开变量向导。
2. 点击 **Identifiers**，从左侧列表选择参数符号 **BeamLength**，点击按钮  创建一个变量。
3. 点击 **Linear variables**，在左侧列表选择刚体 **Body11**，在 **Coordinates of point in the body-fixed frame of reference** 一栏输入 Y 坐标 **0.075**，在 **Type** 框选择 **Coordinate**，选择分量 **Component Z**，点击按钮  创建变量，这表示梁端垂向的绝对位移。
4. 接着创建同一点的横向位移，只需将分量更改为 **Y**，再点击按钮  即可创建变量。现在我们得到了三个变量：**BeamLength**、**r:z(Body11)**和 **r:y(Body11)**。
5. 点击 **Expression**，我们来创建 w/L 变量：
 - 先点击除法运算符 
 - 分别将变量 **r:z(Body11)**和 **BeamLength** 拖入除法运算符的左右两边，如图 3.19 所示；
 - 重命名变量为 w （缺省名为 **Expression**），然后点击按钮  创建变量。

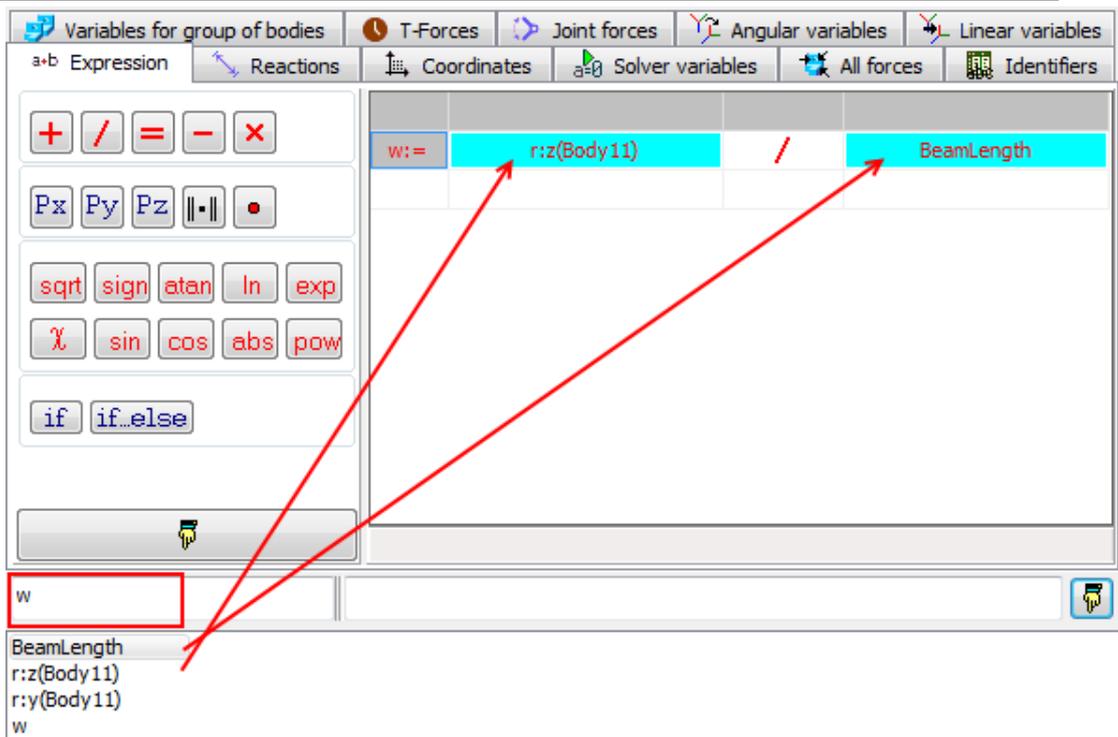


图 3.19 创建 w/L 变量

6. 下面来创建变量 u/L :

- 依次添加一个减法 $-$ 和除法 $/$ 运算符。
- 别将变量 $r:y(\text{Body11})$ 和 BeamLength 拖入如图 3.20 所示的位置；
- 重命名变量为 u ，然后点击按钮  创建变量。

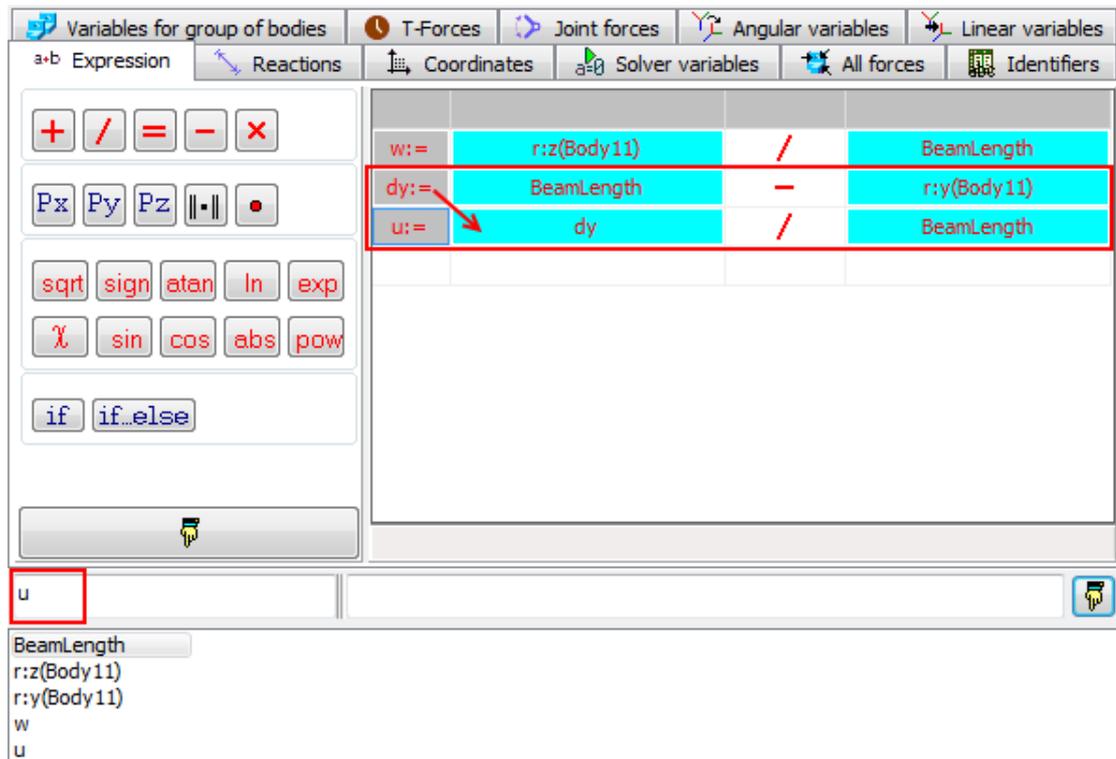


图 3.20 创建 u/L 变量

下面，我们准备计算。打开静态和线性分析工具，点击 **Equilibrium**，将变量向导里的 w 和 u 两个变量拖入，如图 3.21 所示。

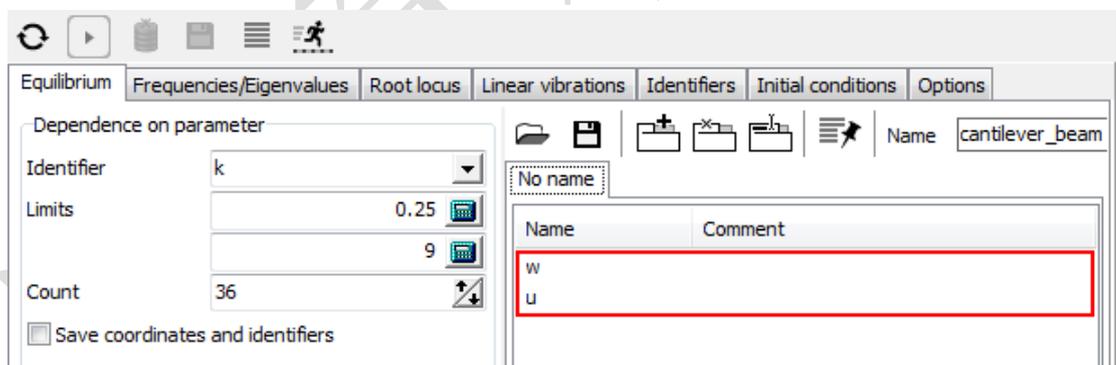


图 3.21 变量列表

在 **Identifier** 一栏选择参数符号 k ，设置下限为 0.25 ，上限为 9 ，离散总数为 36 ，对应系数 k 的增量为 0.25 。点击按钮 开始计算。待计算完毕，打开两个绘图窗口，分别将计算后的变量 w 和 u 拖入，如图 3.22 和图 3.23 所示。

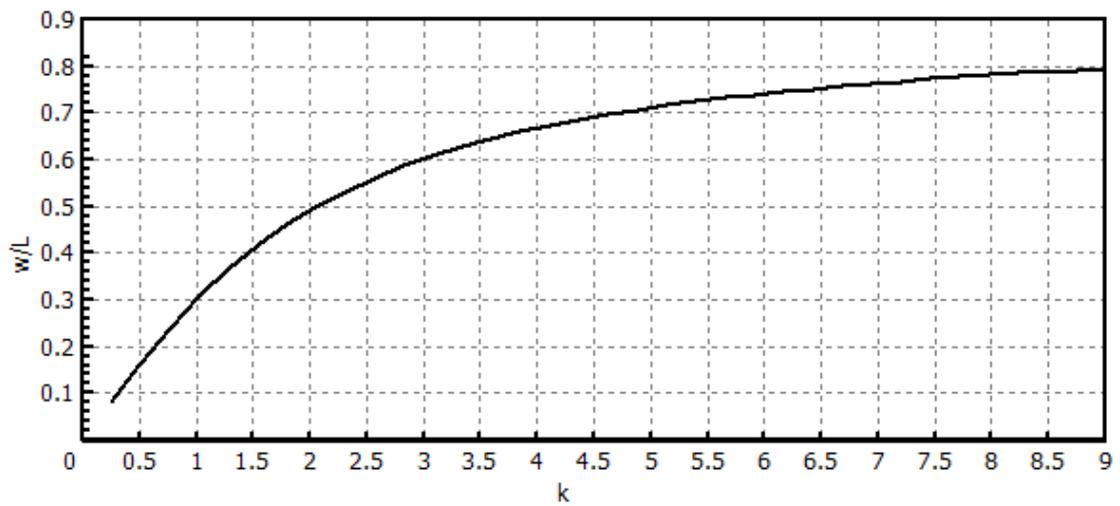


图 3.22 垂向变形

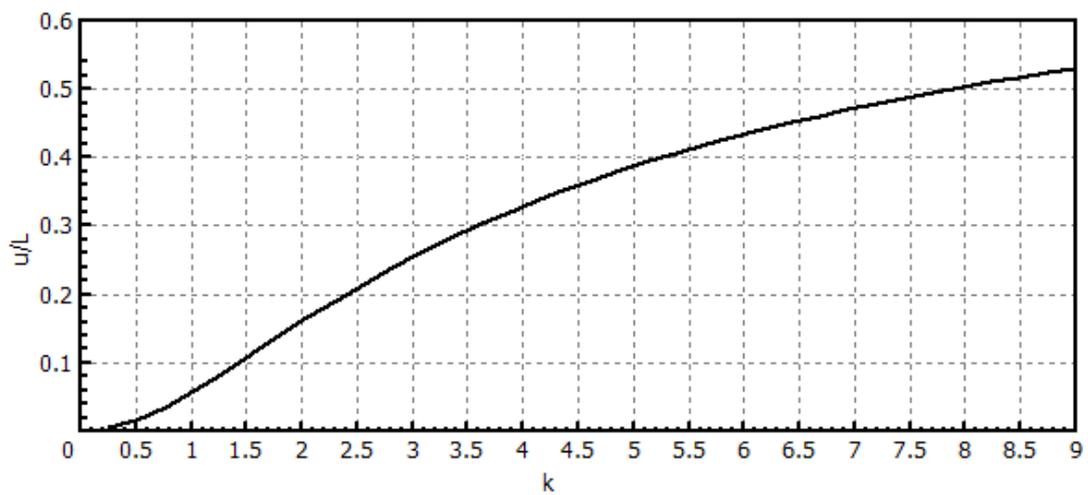


图 3.23 横向变形

数值解与解析解结果对比见表 3.4。

表 3.4 数值解与解析解对比

$k = PL^2/EJ$	解析解		数值解	
	w/L	u/L	w/L	u/L
0.25	0.083	0.004	0.082	0.004
0.50	0.162	0.016	0.162	0.016
0.75	0.235	0.034	0.235	0.034
1	0.302	0.056	0.301	0.056
2	0.494	0.160	0.492	0.161
3	0.603	0.255	0.601	0.254
4	0.670	0.329	0.667	0.329
5	0.714	0.388	0.711	0.387
6	0.744	0.434	0.741	0.434
7	0.767	0.472	0.764	0.472
8	0.785	0.504	0.781	0.504
9	0.799	0.531	0.795	0.531

4. 后续学习课程

恭喜读者完成了本课程三个例子的学习，相信对 **UM Base** 模块基本的工具和功能都有了一定了解。

《UM 软件入门系列教程》还有其它专业模块的教程：

- 《UM 软件入门系列教程 02：批处理仿真》
- 《UM 软件入门系列教程 03：自动控制系统仿真》
- 《UM 软件入门系列教程 04：刚柔耦合动力学仿真》
- 《UM 软件入门系列教程 05：疲劳耐久性仿真》
- 《UM 软件入门系列教程 06：铁道车辆动力学仿真》
- 《UM 软件入门系列教程 07：列车纵向动力学仿真》
- 《UM 软件入门系列教程 08：履带车辆动力学仿真》
- 《UM 软件入门系列教程 09：公路车辆动力学仿真》

此外，我们还准备了一个供读者学习的模型库：

用户手册第七章 **07_UM_Simulation_Examples.pdf**⁴介绍了一些典型的模型建模方法（几何图形、铰和力元），学习这些模型有助于熟练掌握 UM 软件建模技术。本章用户手册位于 **{UM Data}\MANUAL** 目录，对应的模型位于 **{UM Data}\SAMPLES\LIBRARY** 目录。

⁴ 下载链接：http://www.universalmechanism.com/download/80/eng/07_um_simulation_examples.pdf

5. 参考文献

- [1] Slavisa Salinic, Modeling of a light elastic beam by a system of rigid bodies // Theoret. Appl. Mech. – 2004.– V.31(3-4) – P.395-410.
- [2] Euler–Bernoulli beam theory,
https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Bernoulli_beam_theory.
- [3] Euler's critical load, https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_critical_load.
- [4] James M. Gere, Stephen P. Timoshenko, Mechanics of materials. Boston PWS Pub Co. 1997. 4th ed..